ترجمه کتاب اصلی ۲۰۱۳ ۲۰۱۴ ← کتاب مبانی فیزیک ویرایش دهم هالیدی و کرو... (مکانیک و گرما) جلد اول

فیزیک پایه (۱) استاد یاسر توکلی

tavakoli.physics@gmail.com

سرفصل ها:

1. Measurement.
2. Motioning along a straight line
3. vectors.
4. Motion in 2 and 3 Dim.
5. Force and Motion
6. kinetic energy & work
7. rotational energy & conservation energy.
8. centre of mass and
9. Rotation

تا اول ۹ میان ترم

10. Rolling, torque &

---

11. Thermodynamics, Heat and the first law of Thermodynamics
12. The kinetic Theory of gases.
13. Entropy & the 2nd law of thermodynamics.

physics:
- classical theory
  - ① Newton mech. → اجسام بزرگ و سرعت کم
  - ② Special Relativity (سرعت بالا) → هدف: مفاهیم مطلق دیگر مطلق نیست
  - ③ Thermodinamic
  - ④ electromagnetism
  - ⑤ General relativity (برای حرکت c) → هم سرعت ها: سرعت c نمادی دیگر قابل اندازه نیست ↙ طول ← مثل
- Quantum theory (اندازه کوچک)

$c = 299,792,458 \, m/s$ → قوانین نیوتون ① باید ← $v \ll c$ & اندازه های ذرات خیلی بزرگتر از ابعاد اتمی $l \gg l_p$ جواب می دهد

1

Scanned by CamScanner

Quantom theory → Relativistic QM → ذرات با سرعت زیاد

QFT

Quantom theory → QED → میدان ها

۴ ماهیت متفاوت از هم تا دیگر

نیروها : 1. Greavity 2. Em 3. weak Nuclear fore

4. strong nuclear fore

unit-1

Measerment

phisycal observable

- × Time (s)
- × length (m)
- speed (velocity) (m/s)
- × mass (kg)
- acceleration (m/s^2)
- × Electric current (A)
- × Temperature (K)

معیار اندازه گیری time : ۱۳۳ Cs 9,192,631,770 → تعداد نوسان در یک ثانیه برای ۱۳۳ Cs

مدت نوسان

1s = $\frac{1}{86400}$ شبانه روز

براساس مسافت

1 metre = $\frac{1}{10,000,000}$ = $\frac{1}{299,792,458}$ → براساس سرعت

فاصله نصف النهار استوا تا قطب

c

آزمایش های متفاوت براساس کمیت های متفاوت

SI → System International d'unite

1 mile = 1,614 km

$1 = \frac{1\,mile}{1,61\,km} = \frac{1,61\,km}{1\,mile}$

60 km/h = ? m/s

1 km = 1000 m

1 h = 3600 s

$1 = \frac{1\,km}{1000\,m} = \frac{1000\,m}{1\,km}$ تبدیل واحد

$1 = \frac{1\,h}{3600\,s} = \frac{3600\,s}{1\,h}$

$60\frac{km}{h} = 60 \times 1\,km \times \frac{1}{1\,h} = 60 \times \frac{1000\,m}{1\,km} \times 1\,km \times \frac{1\,h}{3600\,s} \times \frac{1}{1\,h} = \frac{60 \times 1000\,(m)}{3600\,(s)} =$

$\frac{60}{3,6} \times \frac{1\,m}{1\,s} = \frac{10}{0,6}\,m/s = \frac{100}{6}\,m/s$

کانال تمرین فیزیک → @Physics1UT

$10^9 \to 1G$ $\quad$ $10^6 \to 1M$ $\quad$ $10^3 \to 1K$ $\quad$ $10^{-2} \to 1c$ $\quad$ $10^{-9} \to 1n$

دقت اندازه گیری ما بستگی به دقت ابزار مورد استفاده دارد.

دقت خط کش → $0.1\,cm$ $\quad$ → $1.5\,cm \times 1.7\,cm = 2.55\,cm^2$

دقت → $2.5\,cm^2$

$[Time] = T$

تحلیل ابعادی: Dimensional Analysis

$[Length] = L$ $\quad$ $[mass] = m$

$$[velocity] = \frac{[length]}{[time]} = \frac{L}{T} = L.T^{-1}$$

فایده: سازگاری دینامیک ابعادی در دو طرف یک معادله

بعد دینامیک هر عدد ثابتی یک است.

کاربرد: مثال قدرتی: $\quad X \propto a^n t^m \to [x] = [A][a]^n.[t]^m \to$

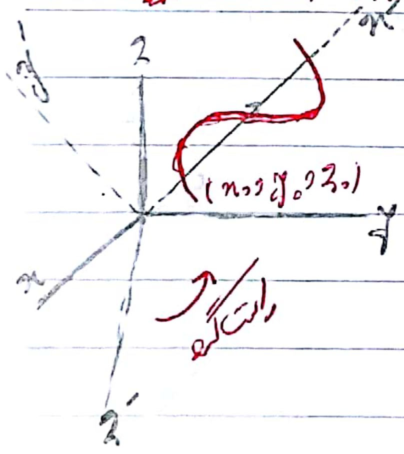
عدد ثابت → 1

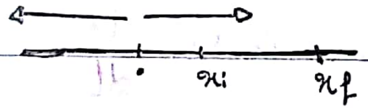
$L = [A][a]^n[t]^m$ $\qquad$ $LT^0 = 1.(LT^{-2})^n.T^m = L^nT^{m-2n}$

$$\begin{cases} n = 1 \\ m - 2n = 0 \xrightarrow{n=1} m = 2 \end{cases} \longrightarrow x = at^2$$

حل تمرین 19

فصل 2: حرکت شناسی





if $x_f > x_i \to \Delta x > 0$

if $x_f < x_i \to \Delta x < 0$

} مفهوم برداری $\vec{\Delta x}$

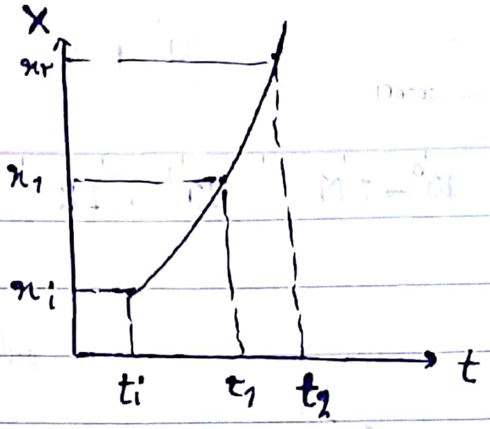
x_f → t_f, $\quad x_i$ → t_i

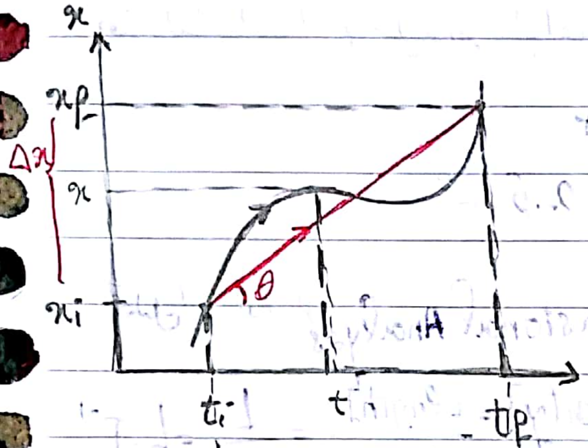
Scanned by CamScanner

برداری

$$\vec{V}_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

$\Delta t \rightarrow +$





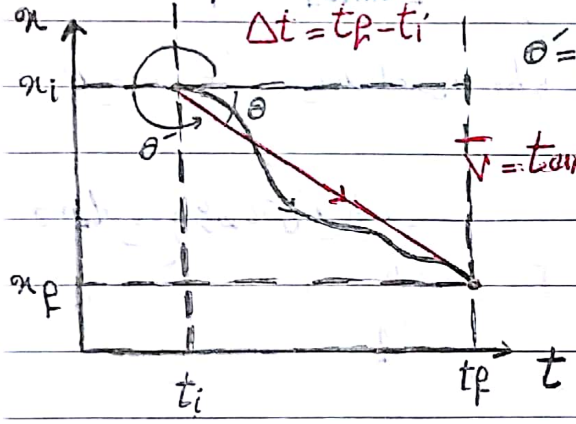
$\Delta t = t_f - t_i$

$$\tan\theta = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \overline{V_{avg}} > 0 \qquad 0 < \theta < 90$$

تندی متوسط

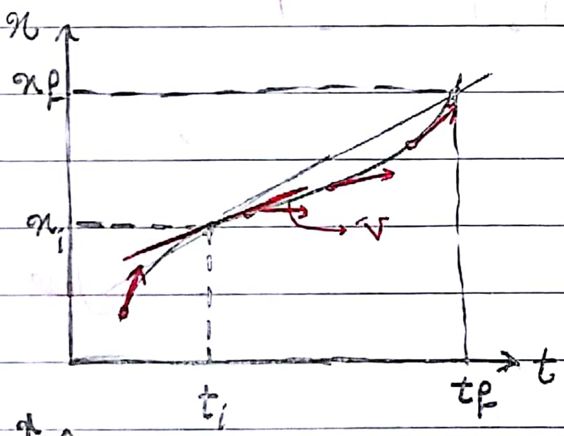
$$v_{avg} = \frac{\text{کل مسافت طی شده}}{\text{زمان } \Delta t} \geqslant \Delta x$$

→ تندی متوسط ⩾ سرعت متوسط



$$\theta' = 2\pi - \theta$$

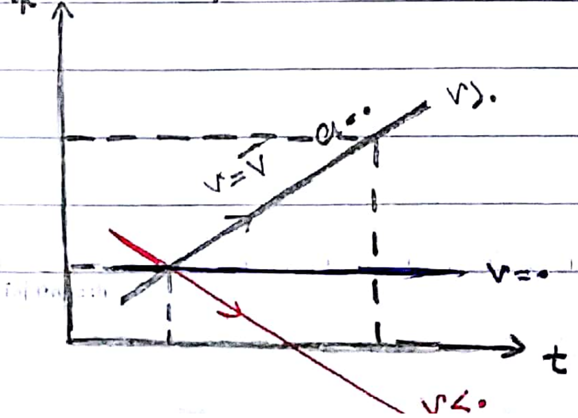
$$\overline{V} = \tan\theta' = -\tan\theta < 0$$



$$v(t_i) = P_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$\rightarrow t_f - t_i$

$$V = \frac{dx}{dt} \quad m/s$$



$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \frac{m/s}{s} = m/s^2$$

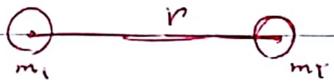
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

$\Delta t \to t_f - t_i$

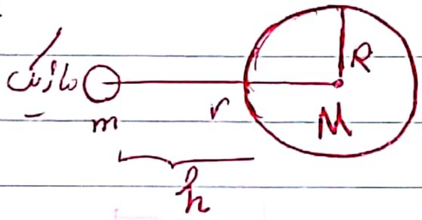
تابعی از زمان است.

قانون گرانش نیوتون

مثالی از حرکت با شتاب ثابت



$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



$$r = R + h$$

$h \ll R$ → تقریب مشابه

h را در نظر نگیرید

$$F_e = \frac{GmM}{(R+h)^2} \cong \frac{GmM}{R_0^2} = m a_m$$

$$a_m = \frac{GM}{R_0^2} \approx 9{,}8\ kg/m^2 \doteq m/s^2 = g$$

$$h \ll R \rightarrow a_m = \frac{GM}{(h+R)^2}$$

در سقوط آزاد با y نشان داده می‌شود

حال فرض انتگرال‌گیری در سطح زمین است:

$a = const$ — حرکت با a ثابت

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad \int_{v_i}^{v} dv = \int_{t_i}^{t} a\,dt \xrightarrow{\text{اگر } a \text{ ثابت}} \int_{v_i}^{v} dv = a\int_{t_i}^{t} dt$$

تابعی از t و قابل انتگرال‌گیری است

برای انتگرال‌گیری تابعیت آن متغیر باید معلوم باشد.

شرایط اولیه → (x_i, v_i, a_i, t_i) → $\int_{v_i}^{v} dv = v - v_i = a\int_{t_i}^{t} dt$ → $(t - t_i)$

$$v(t) = v_i + a(t - t_i)$$

حرکت با شتاب ثابت

Scanned by CamScanner

متغیر

$$v=\frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_i}^{x} dx = \int_{t_i}^{t} v\,dt \rightarrow x-x_i=\int_{t_i}^{t}\left[v_i+a(t-t_i)\right]dt \rightarrow$$

ثابت a

$$x-x_i = v_i\int_{t_i}^{t} dt + a\int_{t_i}^{t}(t-t_i)\,dt = v_i(t-t_i)+a\left(\frac{1}{2}(t-t_i)^2\right) \rightarrow$$

ثابت

$$x = x_i + v_i(t-t_i) + \frac{1}{2}a(t-t_i)^2 \quad (1)$$

$$v-v_i = a(t-t_i) \Rightarrow \boxed{t-t_i=\frac{v-v_i}{a}} \quad (2) \xrightarrow{1,2}$$

(1) × 2a

$$2a(x-x_i) = 2a v_i\left(\frac{v-v_i}{a}\right) + \frac{1}{2}a^2\left(\frac{v-v_i}{a}\right)^2 \rightarrow$$

$$2a(x-x_i) = 2v_iv - 2v_i^2 + v^2 + v_i^2 - 2vv_i \rightarrow 2a(x-x_i) = v^2 - v_i^2$$

سقوط آزاد:

y, $\downarrow a=-g$

$\uparrow v>0$ $\downarrow v<0$

0 → زمین → برای راحتی کار

$$y = y_0 + v_0(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2$$

$$v = v_0 - g(t-t_0) \qquad v^2 - v_0^2 = -2g(y-y_0)$$

نقطه اوج: $0 - v_0^2 = -2g(y_{max}-0) \rightarrow y_{max}=\frac{v_0^2}{2g}$, $0 = v_0 - g(t_{max}-0) \rightarrow t_{اوج}=\frac{v_0}{g}$

از شروع بالا رفتن

فاز دوم حرکت که از اوج تا زمین (حرکت تند شونده) یا برگشت:

$$y = y_0 + v_0 t + \left(-\frac{1}{2}g(t-t_m)^2\right) \quad (y_0 \to y_{max})$$

$$v = 0 - g(t-t_M) \qquad v^2 - 0 = -2g(y-y_{max})$$

در زمین $y=0$, $v_F = v$, $t_F = t$ $\rightarrow v_F^2 = +2g\,y_{max}$ $\qquad v_F = \pm\sqrt{2g\,y_{max}}$ (رفت / برگشت)

$$v_F = -g(T-t_m) \Rightarrow T=$$

زمان کل از شروع حرکت تا برگشت

$v_F<0$

$$-|v_F| = -g(T-t_m) \rightarrow T = \frac{|v_F|}{g} + t_m$$

Scanned by CamScanner

$$|V_f| = \sqrt{2g\,y_{max}} = \sqrt{2g\frac{v_0^2}{2g}} = v_0 \qquad T = \frac{v_0}{g} + t_m = 2t_m$$

حل مسئله ۲۸ فصل 2 هالیدی :

(الف) (1) مبدا — افزایش سرعت (تند شونده) a_0 — t_1 — کاهش سرعت (کند شونده) a_c — (2) مقصد

$x_0 = 0$, $v = 0$ — A ↳ (a_{max}) — X_1 — B → (a_{max} c) کل کاهش سرعت → ماشین گرک شعط آنها

$a_{max} = 1.34\ m/s^2$ → قابل تحمل برای مسافرین

$D = 806m$

$v_{max} = ?$

A: $x_0 = 0$, $t_0 = 0$, $v_0 = 0$ $\quad x = \frac{1}{2}at^2 \quad x_1 = \frac{1}{2}a_{max}t_1^2$

$v = at \quad v_{max} = a_{max}t_1$

$v^2 = 2ax \quad v_{max}^2 = 2a_{max}X_1$

$$v_{max}^2 = 2a_{max}\frac{D}{2} = a_{max}D$$

$403m = x_1 = \frac{806m}{2}$ ← انتظار

$$v_{max} = \sqrt{a_{max}D} = \sqrt{1.34 \times 806} = \sqrt{900} = 30\ m/s$$

$$t_1 = \frac{v_{max}}{a_{max}} = \frac{\sqrt{a_{max}D}}{a_{max}} = \sqrt{\frac{D}{a_{max}}} = \sqrt{\frac{806}{1.34}}\ s$$

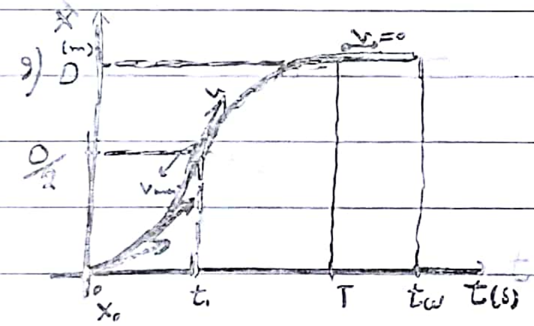
ب) $T = 2t_1$

ج) ① ———— ②

t_w توقف $= 20s$

$$V_{avg}\ \text{سرعت} = \frac{\text{مسافت کل حرکت}}{\text{کل زمان}} = \frac{D}{T + t_w}$$

د)

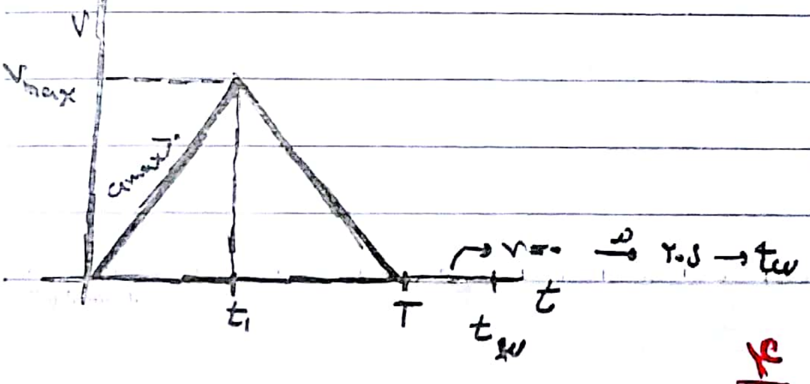


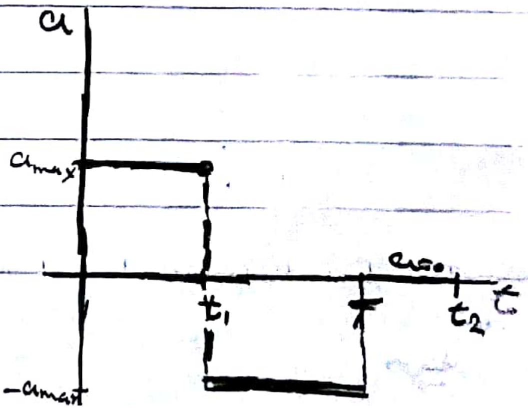
t_1 تا t

$\frac{D}{2} \leftarrow x = \frac{1}{2}at^2 \qquad D = at^2$

همان سهمی است. سهمی $X-t$ است $\quad t_1 = \frac{T}{2}$

T تا t_1 → $x = -\frac{1}{2}|a_{max}|(t - t_1)^2$

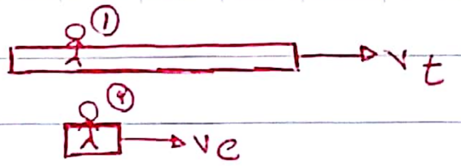




۴

Scanned by CamScanner

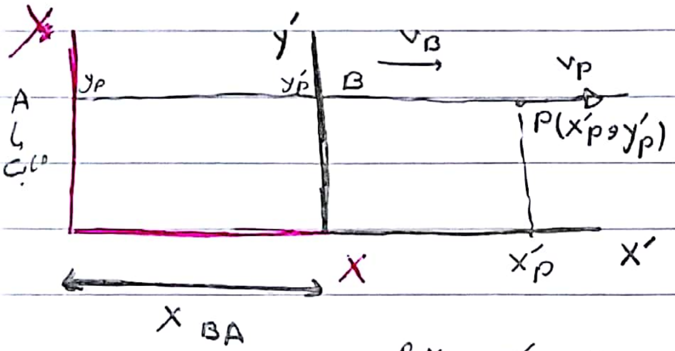
حرکت نسبی:



در حالی که v_1 را پیموده می‌شد

$v_1 = v_t - v_c$

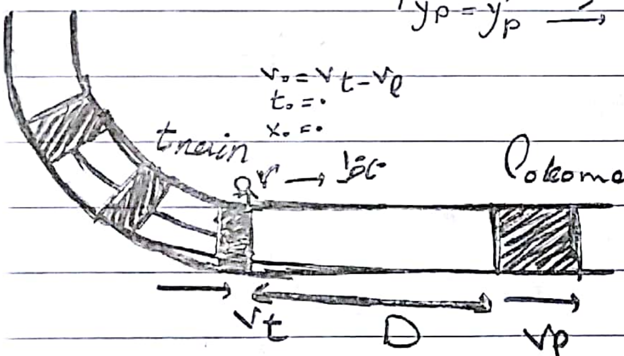
$v_2 = v_c - v_t$



$\rightarrow v_A = 0$

$$\begin{cases} x_p = x'_p + x_{BA} \rightarrow v_{xp} = v'_{xp} + v_{xB} \\ y_p = y'_p \rightarrow v_{yp} = v'_{yp} \end{cases}$$

حل مسئله ۳۴ : الف)



lokomotiv → درحال حرکت است

باید شتاب t طوری باشد که v اش با v_l برابر شود و پایان

تماس شود اما مشکل ← lokomotiv ساکن نیست مشکل

حداقل شتاب کافی هست

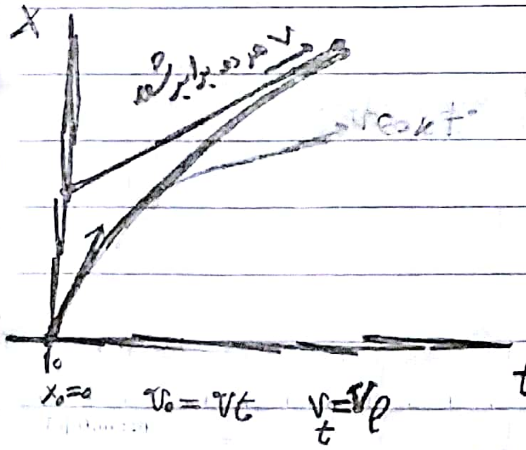
سوار یکی از دو وسیله شود مشکل نسبی را ببرین ← نسبی نسبی

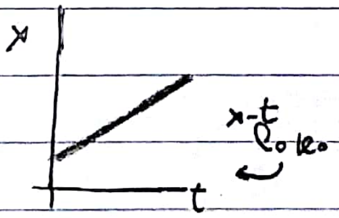
$v_r = v_t - v_l$

$$v_r^2 - v_{0r}^2 = 2a(x - x_0) \rightarrow -(v_t - v_l)^2 = -2|a_{min}| D$$

$$|a_{min}| = \frac{(v_t - v_l)^2}{2D}$$

ب)





$x_0 = 0$ $\quad v_0 = v_t \quad v_t = v_l$

$$x = 0 + v_t t - \frac{1}{2}|a_{min}| t^2$$

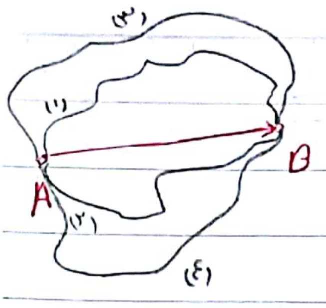
← سهمی

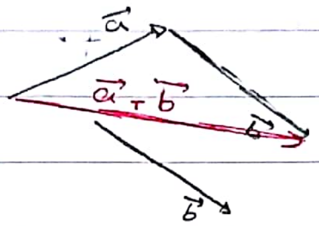
$v_t > v_l$ ← اول می‌رسد لوکو دیده شده

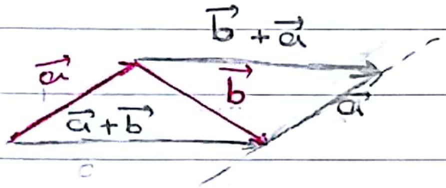
Scanned by CamScanner

میان‌ترم تا انتهای فصل ۹: مرکز جرم و تکانهٔ خطی

بردار:

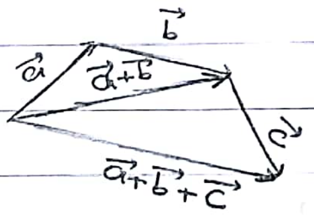






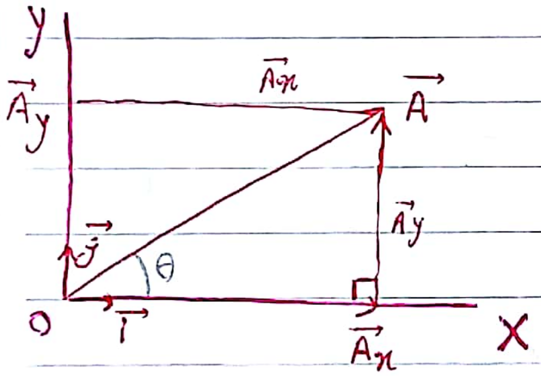
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — خاصیت جابجایی ✓

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ — اشتراک‌پذیر



بررسی بردارها در 2 بعد:

نیاز به دستگاه مختصات دو بعدی داریم



$\vec{A}=\underbrace{\vec{A}_x}_{A_x\vec{i}}+\underbrace{\vec{A}_y}_{A_y\vec{j}}$

A_x: مؤلفهٔ اسکالر

$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}$

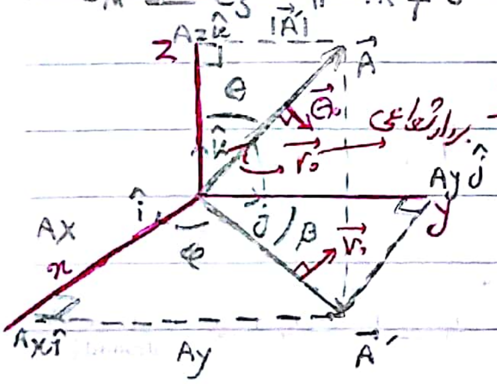
n-Dim vector space $\rightarrow H_n$ $\quad \vec{B}\in H_n$

مجموعه اعضا مجموعه n بعدی: $\{e_m\}\in H_n$ ($\hat{e}_n$ اعضای متعامد)

$\vec{B}=B_1\hat{e}_1+B_2\hat{e}_2+\cdots+B_n e_n$

$\rightarrow \;=\sum_{m=1}^{n} B_m\hat{e}_m$

$\hat{e}_m \perp \hat{e}_s$ if $m\neq s$



سه بعد: $\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$

سطح جسم یا کره و... ارتفاع

اندازه کره با ارتفاع

$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$

Scanned by CamScanner

مختصات دو بعدی : فیثاغورث : $|\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 = |A|^2\sin^2\theta + |\vec{A}|^2\cos^2\theta = |\vec{A}|^2 \underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1}$

$\sin\theta = \dfrac{A_y}{|\vec{A}|}$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{A_x}{|\vec{A}|}$ $\qquad \longrightarrow A_x^2 + A_y^2 = |\vec{A}|^2$

$A_y = |\vec{A}|\sin\theta$ $\qquad A_x = |\vec{A}|\cos\theta$

سه بعدی $\quad \sin\theta = \dfrac{|\vec{A}'|}{|\vec{A}|}$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{A_z}{|\vec{A}|}$ $\qquad \sin\varphi = \dfrac{A_y}{|\vec{A}'|}$ $\qquad \cos\varphi = \dfrac{A_x}{|\vec{A}'|}$

$A_x = |\vec{A}'|\cos\varphi = |\vec{A}|\sin\theta\cos\varphi$

$A_y = |\vec{A}'|\sin\varphi = |\vec{A}|\sin\theta\sin\varphi$

$A_z = |\vec{A}|\cos\theta$

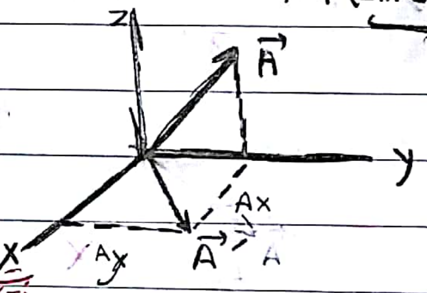
$\vec{A}' = |\vec{A}|\sin\theta$ $\qquad \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |A|^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + |\vec{A}|^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + |A|^2\cos^2\theta$

$= |\vec{A}|^2\sin^2\theta\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} + |\vec{A}|^2\cos^2\theta = |A|^2\underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} = |A|^2$

$\longrightarrow |A|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

شکل :



3-Dim

مختصات در سه بعد
1. Cartesian coordinate (کارتزین) (دکارتی)
2. spherical (کروی) " $\longrightarrow$ 2-Dim => polar coordinate
3. Cylendrical (استوانه‌ای) "

$\vec{r}$ (بردار مکان) $= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$x = |\vec{r}|\sin\theta\cos\varphi$

$y = |\vec{r}|\sin\theta\sin\varphi$ $\qquad |\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$z = |\vec{r}|\cos\theta$ $\qquad \theta, r_0$

$\vec{r} = |\vec{r}|(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k})$

$\vec{r} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ $\qquad \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \hat{r}_0(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k})$

Scanned by CamScanner

$$|\vec{\Theta}|^2 = x_\Theta^2 + y_\Theta^2 + z_\Theta^2$$

$\hat{\Theta}_\circ = ?$ → $\vec{\Theta} = x_\Theta \hat{i} + y_\Theta \hat{j} + z_\Theta \hat{k}$

$$\begin{cases} x = |\Theta| \sin\Theta \cos\varphi \\ y = |\Theta| \sin\Theta \sin\varphi \\ z = |\Theta| \cos\varphi \end{cases}$$

تمرین در خانه:

$\hookrightarrow \vec{\Theta}_\circ = |\Theta| (\sin\Theta\cos\varphi + \sin\Theta\sin\varphi + \cos\varphi)$

$\vec{\Theta}_\circ = \dfrac{\vec{\Theta}}{|\Theta|}$

$\hat{\varphi}_\circ = ?$

$\Theta_\circ = \sin\Theta\cos\varphi \hat{i} + \sin\Theta \sin\varphi \hat{j} + \cos\varphi \hat{k}$

تمرین (تحقیق) کروی $(\hat{r}_\circ , \hat{\Theta}_\circ , \hat{\varphi}_\circ)$

ضرب بردار ها

$C \in \mathbb{R}$ و $\vec{A}$ $\quad C\vec{A}$ ضرب عدد در بردار A

$\longrightarrow \vec{A}$

$\overrightarrow{\frac{1}{2}A}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\Theta$ عدد یا بردار؟ ← عدد ؛ (حاصل ضرب عدد یا (نقطه ای) حاصل ضرب عددی یا اسکلر یا برداری) A B

$\hat{i}\cdot\hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}| \underbrace{\cos 0}_{1} = 1\times1 = 1 \qquad \hat{i}\cdot\hat{i} = 1 \qquad \Theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

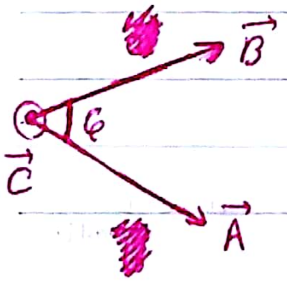
$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) = A_xB_x\underbrace{(\hat{i}\cdot\hat{i})}_{1} +$

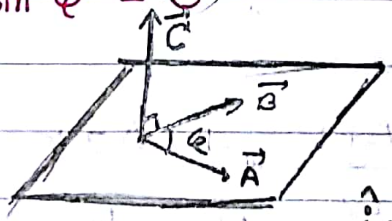
$A_yB_y\underbrace{(\hat{j}\cdot\hat{j})}_{1} + A_zB_z\underbrace{(\hat{k}\cdot\hat{k})}_{1} + A_xB_y(\hat{i}\cdot\hat{j}) + A_xB_z(\hat{i}\cdot\hat{k}) + A_yB_x(\hat{j}\cdot\hat{i}) +$

$A_yB_z(\hat{j}\cdot\hat{k}) + A_zB_x(\hat{k}\cdot\hat{i}) + A_zB_y(\hat{k}\cdot\hat{j}) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

C: حاصلضرب یک بردار باشد!

$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\varphi = \vec{C}$





$|\hat{i}\times\hat{j}| = |\hat{i}||\hat{j}|\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = 1$

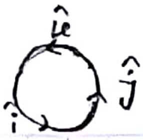
$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$

طبق قاعده ی دست راست

$j \times i = -k$

$k \times i = j \qquad j \times k = i$

$\hat{i}\times\hat{i} = 0 \longrightarrow \Theta = 0 \longrightarrow \sin\Theta = 0$



$$\hat{A}\times\hat{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z k)\times(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z k) = A_x B_y \underbrace{(i\times j)}_{K} + A_x B_z \underbrace{(i\times K)}_{-\hat{j}}$$

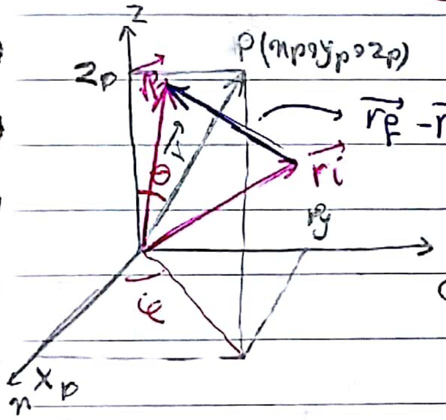
$$+ A_y B_x \underbrace{(j\times i)}_{-K} + A_y B_z \underbrace{(j\times k)}_{i} + A_z B_x \underbrace{(k\times i)}_{\hat{j}} + A_z B_y \underbrace{(k\times j)}_{-i} =$$

$$A_x B_y K - A_x B_z \hat{j} - A_y B_x K + A_y B_z i + A_z B_x \hat{j} - A_z B_y i = [A_y B_z - A_z B_y]\hat{i}$$

$$+ [A_z B_x - A_x B_z]\hat{j} + [A_x B_y - A_y B_x]k = \det\begin{bmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{bmatrix} = \vec{A}\times\vec{B}$$

A good book → MATT VisseR Lorentzian wormhole

Motion in 2 and 3 - Dim   Projectile motion   circlear motion



$$\vec{r_f} - \vec{r_i} = \Delta\vec{r}$$

$\vec{P}(x_p, y_p, z_p)$

$$P\begin{cases} x_p = |\vec{r}|\sin\theta\cos\varphi \\ y_p = |\vec{r}|\sin\theta\sin\varphi \\ z_p = |\vec{r}|\cos\varphi \end{cases}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{cases} \vec{r_i} = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k} \\ \vec{r_p} = x_p\hat{i} + y_p\hat{j} + z_p\hat{k} \end{cases}$$

$$\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = (x_f - x_i)\hat{i} + (y_f - y_i)\hat{j} + (z_f - z_i)\hat{k} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$$

$$\left(\left(\bar{V}_{avg} = \bar{V}_x\hat{i} + \bar{V}_y\hat{j} + \bar{V}_z\hat{k}\right)\right)$$

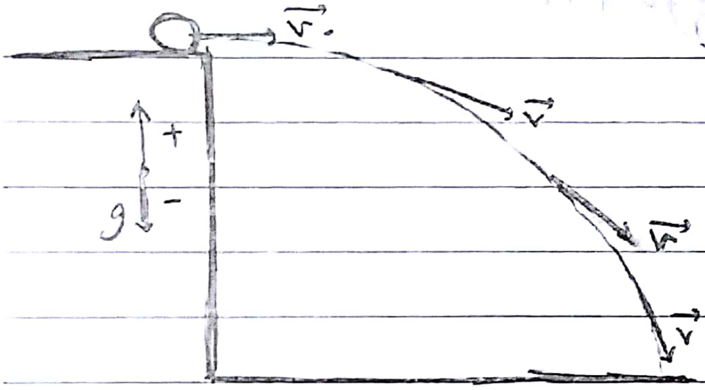
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x_i}{\Delta t}}_{\frac{dx}{dt}\hat{i}} + \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y\hat{j}}{\Delta t}}_{\frac{dy}{dt}\hat{j}} + \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z\hat{k}}{\Delta t}}_{\frac{dz}{dt}\hat{k}} \Rightarrow$$

Scanned by CamScanner

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$a_{avg} = \frac{\overrightarrow{\Delta v_{avg}}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x \hat{i}}{\Delta t} + \frac{\Delta v_y \hat{j}}{\Delta t} + \frac{\Delta v_z \hat{k}}{\Delta t} = \bar{a}_x\hat{i} + \bar{a}_y\hat{j} + \bar{a}_z K$$

شتاب لحظه‌ای: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$



حرکت پرتابی

$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$ (const)

$t=0$ $\boxed{\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i}}$

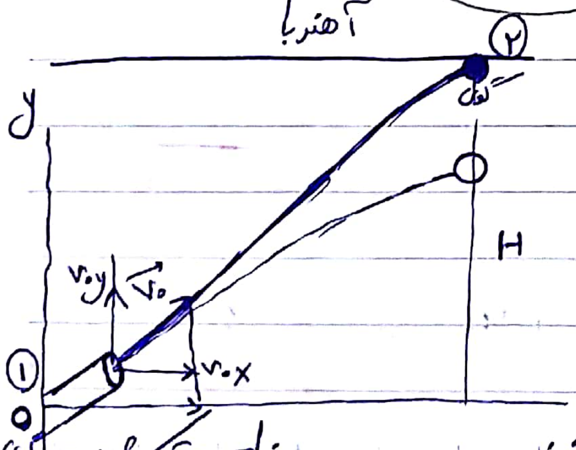
$t \neq 0 \begin{cases} \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \\ \vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = v_{0x}\hat{i} + v_y\hat{j} \end{cases}$ (const — در جهت x یکنواخت / با سرعت ثابت)

$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$ ($a_x = 0$, $a_y \to -g$ ثابت)

$$\vec{F} = m\vec{a} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} = m(a_x\hat{i} + a_y\hat{j})$$

$\begin{cases} F_x = ma_x = 0 \\ F_y = ma_y \end{cases}$ پس طبق قانون نیوتن حرکت ثابت

آهنربا



حرکت یکنواخت در راستای افقی $\Rightarrow v_x = v_{0x} = const$

در راستای قائم دو حالت داریم

قائم $\begin{cases} ① \; g = 0 = a_y \\ ② \; g \neq 0 = a_y \end{cases}$

فرض: منطقه‌ای هستیم که شتاب گرانش صفر است. ← حرکت در راستای x و y یکنواخت است.

۷

Scanned by CamScanner

$y = v_{0y} t$ (غیاب گرانش)

معادلات در راستای قائم برای حالت ①:

گوی ① : $y = y_0 + v_{0y} t$ ، $y - y_0 = v_{0y} t$

برخورد : $y = y'$

$v_{0y} t = H$

گوی ② : $y' - y'_0 = 0$ ← گوی دوم چسبیده به آهنربا و بی‌حرکت است

y_0 مثبت به مبدأ باید سنجیده شود ← H → $y' = H$

حالت ② (حضور گرانش)

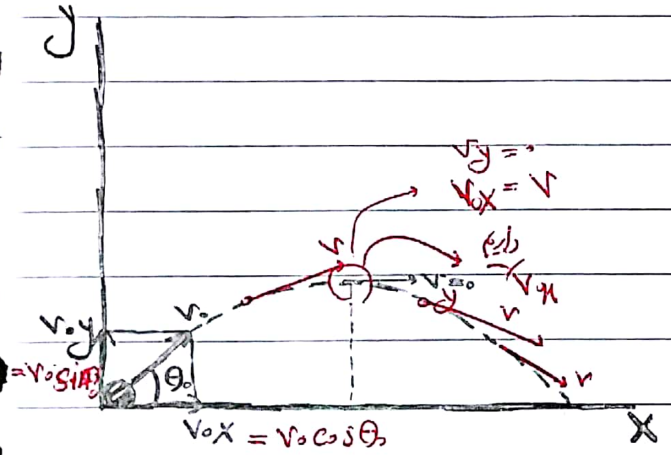
از بین رفتن آهنربا پس از برخورد گوی ۲ با آهنربا

گوی ① : $y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y} t$

گوی ② : $y' - H = -\frac{1}{2}gt^2$ ، $y' = -\frac{1}{2}gt^2 + H$

$\boxed{y = y'}$

حرکت پرتابی:



$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$v_x = v_{0x} = const$

$x - x_0 = v_{0y} t$

$v_y = v_{0y} - gt$

$y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y} t$

$\boxed{t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}}$ ⑤

$x - x_0 = v_{0x} t$ ④

$y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y} t$ ⑥

$\vec{v}_0 = \vec{v}_{0x}\,\hat{i} + \vec{v}_{0y}\,\hat{j} = |\vec{v}_0| \cos\theta_0 + |\vec{v}_0| \sin\theta_0$

$x - x_0 = |\vec{v}_0| \cos\theta_0\, t$ ①

$v_y - v_{0y} = -gt$ ③ $v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g(y - y_0)$ ②

Scanned by CamScanner

$5,6 \rightarrow \quad y-y_0 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x-x_0}{v_{0x}}\right)^2 + v_{0y}\left(\frac{x-x_0}{v_{0x}}\right)$

$$y-y_0 = -\frac{1}{2}g\frac{(x-x_0)^2}{v_0^2\cos^2\theta_0} + \frac{v_0\sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0}(x-x_0)$$

$$y-y_0 = \underbrace{-\frac{1}{2}g\frac{1}{v_0^2\cos^2\theta_0}}_{A}(x-x_0)^2 + \underbrace{\tan\theta_0}_{B}(x-x_0) \longrightarrow y = AX^2 + BX$$

درجه دوم

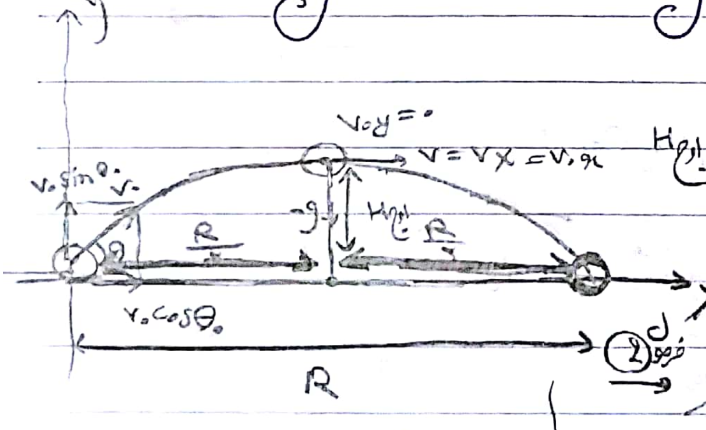
معادله مکان حرکت دو بعدی پرتابی

$y_0 = x_0 = 0 \xrightarrow{\text{یک نقطه برخورد با محورها}}$ ①

② $y=0 \xrightarrow{\text{بدست آوردن برد پرتابی}} \quad \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}X^2 + \tan\theta_0 X = 0 \quad X\left[\tan\theta_0 - \frac{gx}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right] = 0$

$$x=0 \quad \text{L} \quad x=R \longrightarrow \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} = +\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}R$$

$$R = \frac{2v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g} = \frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}$$



محاسبه ی نقطه ی اوج با ارتفاع: $\frac{v_{0y}^2}{2g}$

$H_{اوج} = ?$ در اوج $\begin{cases} v_{0y}=0 \\ v_0 x \text{ ثابت} \end{cases}$ $a=-g$, $y=H$

$(y)-y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t$

② فرمول $\rightarrow v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g(y-y_0)$ $\quad v_0^2\sin^2\theta_0 = 2g(H)$

$$H_{اوج} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}$$

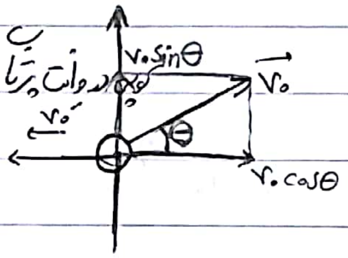
$$H_{اوج} = \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}$$

Scanned by CamScanner

حرکت افقی
$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 = \text{Const} \\ x = v_{0x} t \end{cases}$$

حرکت قائم
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = -2gy$$



$$v_{y_{max}} = 0 \longrightarrow t_{اوج} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$$

$$t_T = 2 t_{اوج}$$

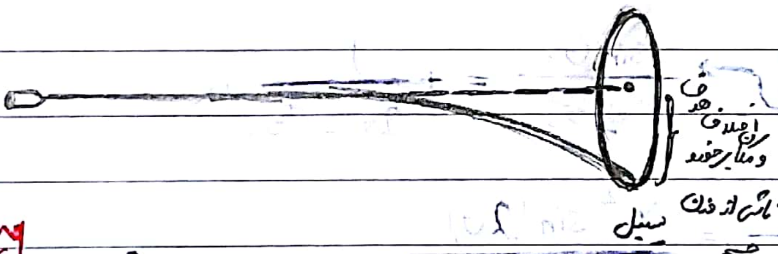
روش اول

$$X_{کل\,T} = R_{برد} = v_0 x t \Rightarrow T_{کل} = v_{0x} T = v_{0x} \frac{2 v_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{2 v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

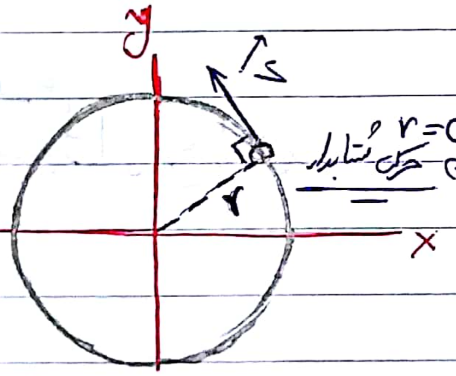
روش دوم ⟵ از معادله مسیر اثبات شده ⟵ $y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0} x^2 + (\tan\theta_0) x$ $\quad x = R$

$$R_{max} = \frac{v_0^2 \overbrace{\sin 2\theta_0}^{max = 1}}{g} \qquad \sin 2\theta_0 = 1 \qquad 2\theta_0 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{4}\, rad = 45^\circ$$

گلوله:



حرکت دو بعدی (دایره‌ای و ...)



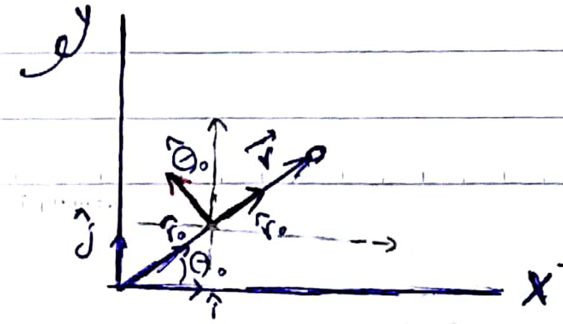
$r = \text{Const}$ حرکت شتابدار

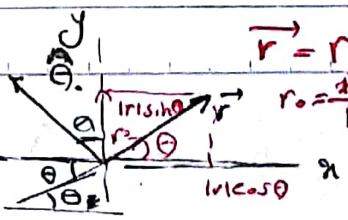
$$|\vec{v}| = v_{ثابت} = \text{Const}$$

$$\vec{r} = |r| \sin\theta\, \hat{j} + |r| \cos\theta\, \hat{i} \qquad \vec{r} = r \hat{r}_0 \qquad \hat{r}_0 = \frac{\vec{r}}{|r|}$$

$\hat{r}_0$ بردار یکه

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} \qquad \{\hat{i}, \hat{j}\}$$





$$\vec{r} = r \hat{r}_0 \qquad \{\hat{r}_0, \hat{\theta}_0\}$$

$$r_0 = \frac{\vec{r}}{|r|}$$

$$\begin{cases} \hat{r}_0 = \cos\theta\, \hat{i} + \sin\theta\, \hat{j} \\ \hat{\theta}_0 = -\sin\theta\, \hat{i} + \cos\theta\, \hat{j} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$\frac{d\theta}{dt} \equiv \dot{\theta} \qquad \theta = \theta(t) \qquad r = r(t)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \equiv \ddot{r}$$

ارادات ← $\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt}$ تعریف کمی بزرگی

$$\vec{r} = r\hat{r}_0 + 0\,\hat{\theta}_0 \qquad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}_0) = \dot{r}\hat{r}_0 + r\frac{d\hat{r}_0}{dt} \Rightarrow$$

$\vec{r}$ هیچ مولفه‌ای به سمت $\hat{\theta}_0$ ندارد.

$$\frac{d\hat{r}_0}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{i} + \dot{\theta}\cos\theta\,\hat{j} = +\dot{\theta}\,[\underbrace{-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}}_{\hat{\theta}_0}] = \dot{\theta}\hat{\theta}_0$$

$$\vec{V} = V_r\hat{r}_0 + V_t\,\hat{\theta}_0$$

سرعت زاویه‌ای ← $\dot{\theta}$

$$\frac{d\theta}{dt} \equiv \dot{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}_0}{dt} = -\dot{\theta}\,[\underbrace{\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}}_{\vec{r}_0}] = -\dot{\theta}\,\vec{r}_0$$

$$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} = V_r\hat{r}_0 + V_t\hat{\theta}_0 \Longrightarrow \boxed{\vec{V} = \dot{r}\hat{r}_0 + r\dot{\theta}\hat{\theta}_0}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r}_0) + \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}\hat{\theta}_0) = \ddot{r}\hat{r}_0 + \dot{r}\,(\underbrace{-\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{i} + \dot{\theta}\cos\theta\,\hat{j}}_{(\dot{\theta}\hat{\theta}_0)}) +$$

$$\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}_0 + r\ddot{\theta}\hat{\theta}_0 + \underbrace{r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r}_0)}_{-r\hat{r}_0\dot{\theta}^2} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{a_r}\hat{r}_0 + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{a_t}\hat{\theta}_0$$

$$\vec{V} = V_r\hat{r}_0 + V_t\hat{\theta}_0 = \dot{r}\hat{r}_0 + r\dot{\theta}\hat{\theta}_0$$

$$\vec{a} = a_r\hat{r}_0 + a_t\hat{\theta}_0 = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r}_0 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}_0$$

اندازه سرعت مماسی ثابت یعنی $\dot{\theta}$ ثابت.

حرکت دایره‌ای یکنواخت: $r = Const \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$\dot{\theta} = Const \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{r}_0$ شتاب مرکزگرا

$\vec{V} = r\dot{\theta}\hat{\theta}_0 \qquad v = |\vec{V}| = r\dot{\theta}$

نشانه سرعت ← تندی $= r(t)$

Scanned by CamScanner

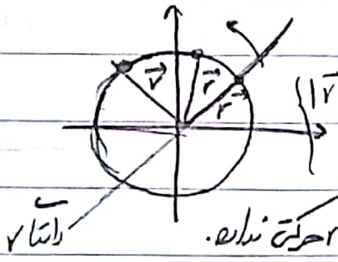
اندازه سرعت

$$a = -r\left(\frac{v}{r}\right)^2 = -r\left(\frac{v^2}{r^2}\right) = -\frac{v^2}{r}\hat{r}_0$$ → تکیه

۱۳۹۶,۰۸,۰۱

$$\begin{cases}\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \\ \vec{a} = a_r\hat{r}_0 + a_\theta\hat{\theta}_0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \\ \vec{r} = r\hat{r}_0\end{cases}$$



$|\vec{r}| = r = Const$

$\dot{r} = 0 = \ddot{r}$

جسم در راستای r حرکت ندارد.

حرکت در راستای θ با سرعت ثابت است

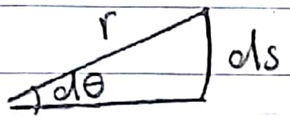
if $\dot{\theta} = Const$

$\ddot{\theta} = 0$

$a_\theta = 0$ $a_r = r\dot{\theta}^2$

$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{r}_0$ $\dot{\theta} = \omega$ سرعت زاویه‌ای

$\vec{a} = -r\omega^2\hat{r}_0$ تکیه



$ds = r\,d\theta$ (Rad) $v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta}$ (تندی)

$v = r\dot{\theta} = r\omega$

$$\vec{a} = -r\frac{v^2}{r^2}\hat{r}_0 = -\frac{v^2}{r}\hat{r}_0$$

$\int ds = \int r\,d\theta$ $S = r\int_0^{2\pi} d\theta$ (مسافت کل) $S = 2\pi r$ (محیط)

$x = vt$

↓

$S = vT$ (تندی) (زمان کل)

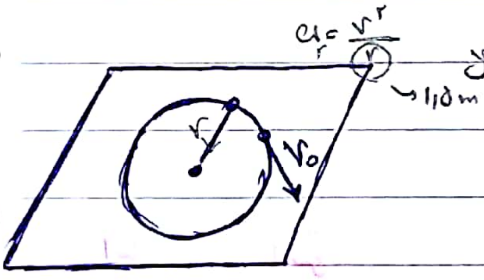
$2\pi r = vT$ ← دوره تناوب (زمان چرخش ۲π)

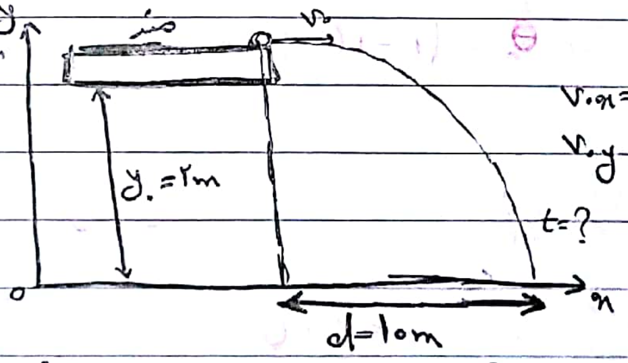
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{r\omega} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$$

هرتز $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ ⟶ $\omega = 2\pi f$

$(\frac{1}{s})$ یا (s^{-1})

مسئله ۴۷ فصل ۴:





$v_{0x} = v_0$ $a_x = 0$

$v_{0y} = 0$ $a_y = -g$

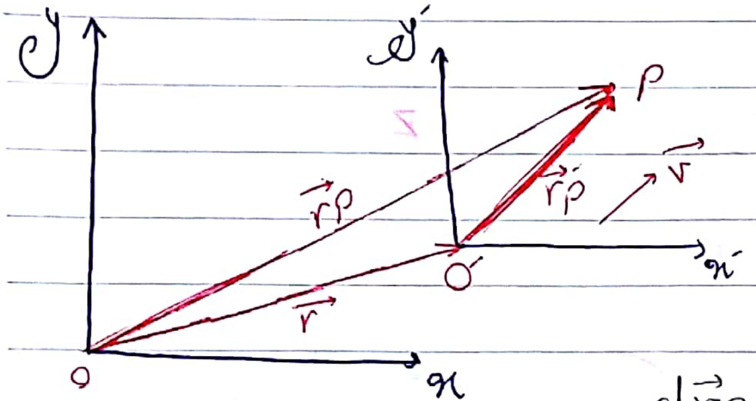
x راستای : $x - x_0 = v_{0x}t$

y راستای : $y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t$ ⟶ $0 - (2) = -\frac{1}{2}gt^2$ $t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{4}{10}}$

$X_F - X_0 = d = v_0 t$ $v_0 = \frac{d}{t} = d \times \sqrt{\frac{g}{2y_0}} = 10 \times \sqrt{\frac{9.8}{4}} = 1…$

Scanned by CamScanner

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{gd^2}{2y_0 r}$$



$$\vec{r}_p = \vec{r}_p' + \vec{r}$$

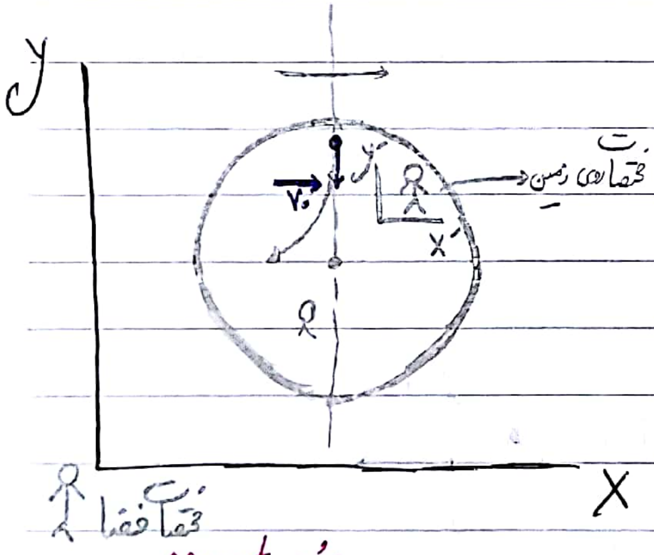
$$\frac{d\vec{r}_p}{dt} = \frac{d\vec{r}_p'}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}_p = \vec{v}_p' + \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{d\vec{v}_p'}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{ثابت } v$$

فصل ۵: نیرو (N) عامل حرکت و تغییر سرعت نیرو است

First law (Newton): قانون لختی: جسم ساکن، ساکن می‌ماند و متحرک به حرکت خود ادامه می‌دهد مگر اینکه نیرویی به آن وارد شود.



در مختصات کوچک حرکت زمین لخت است

Newton's

1. Second and third law

2. Forces examples

$$m = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Scanned by CamScanner

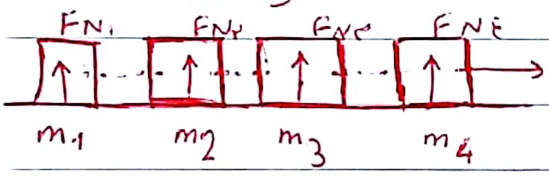
$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$ if $\vec{F}_{net} = 0 \rightarrow \vec{a} = 0$

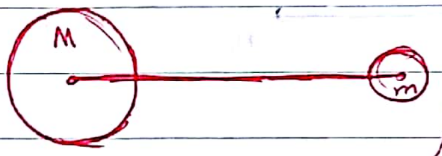
$F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = m(a_x \hat{i} + \cdots)$

$F_x = ma_x$, $F_y = ma_y$, $F_z = ma_z$

نیروهایی که باید بدانیم در بخش نیرو ۰ قانون سوم نیوتن ۰ نیروی گرانش ۰ نیروی اصطکاک ۰ نیروی کشش ۰ نیروی عمود سطح

۰ نیروی فنر



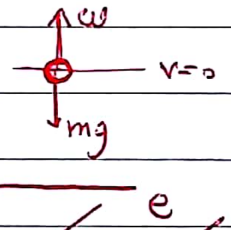


$F_g = \frac{GMm}{r^2}$

$|F_{mM}| = |F_{Mm}|$

$\cancel{m} a_m = \frac{G \cancel{m} M}{R^2} \rightarrow a_m = \frac{GM}{R^2} = g \simeq 10\ m/s^2$

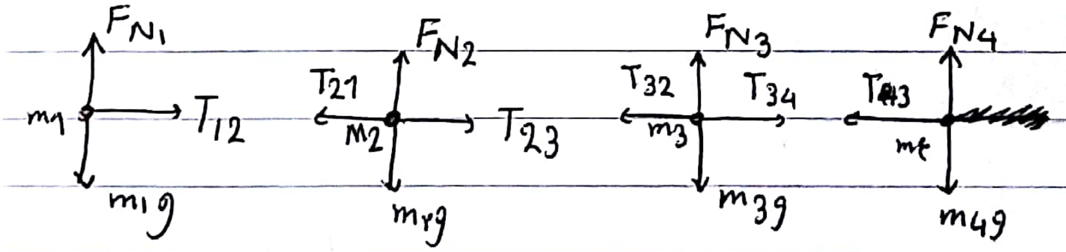
$M a_M = \frac{GMm}{R^2} \simeq 0$ (کوچک)



$\vec{F}_{net} = \omega + mg = 0$

$\vec{\omega} = -\vec{mg}$

N نیروی عمودی که در سطح تماس اجسام یکی بر دیگری وارد می‌کند (سطح به جسم وارد می‌کند)



$\Sigma F_y = 0$

$\Sigma F_x = m_T a_T$

$\longrightarrow$

$T_{12} = m_1 a_1$

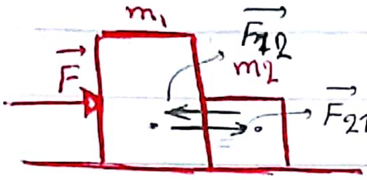
$T_{23} - T_{21} = m_2 a_x$

$F - T_{43} = m_4 a_4$

Scanned by CamScanner

11

مسئله ۵۵ فصل 5 هالیدی



F	m_1+m_2
F_{21}	m_2

$m_1 = 2.3\,kg$

$m_2 = 1.2\,kg$

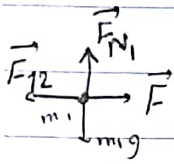
3.2	3.5
F_{21}	1.2

$F = 3.2\,N$

$$\vec{F_{21}} = \frac{1.2 \times 3.2}{3.5} = 1.097\,N$$

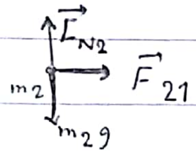
الف)

برای جسم 1:



$m_1 : \; F - F_{12} = m_1 a_1 = m_1 a$

برای جسم 2:

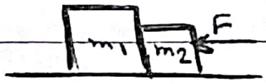


$m_2 : \; F_{21} = m_2 a_2 = m_2 a$

$F_{12} = F_{21} = |\vec{F_{12}}| = |\vec{F_{21}}|$

$F = (m_1+m_2)\,a \qquad a = \frac{F}{m_1+m_2} \qquad F_{21} = m_2 a = \frac{m_2 a}{m_1+m_2} = F_{12}$

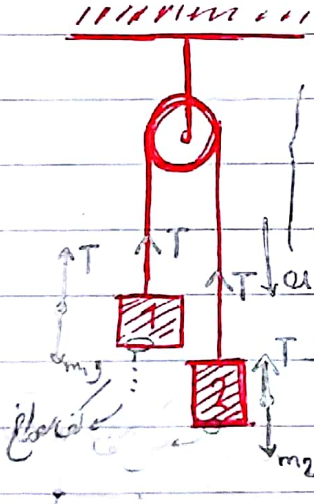
ب)



$$F'_{12} = F'_{21} = \frac{m_1 F}{m_1+m_2} \neq \frac{m_2 F}{m_1+m_2}$$

$F'_{12} \neq F_{12} \qquad$ if $\; m_1 > m_2 \Rightarrow F'_{12} > F_{12}$

مسئله ۴۵:



$t=0$ در

$m_2(t=0) = m_2^{\circ} = 2.8\,kg$

$m_1(t=0) = m_1^{\circ} = 1.3\,kg$

$\frac{dm_1}{dt} = -\lambda \;;\; \lambda = 0.200\,kg/s$ میزان آب خارج شده

$m_2 > m_1 \longrightarrow \downarrow a$ جهت شتاب $\qquad m_2 g - T = m_2 a \; (1)$

$T - m_1 g = m_1 a \; (2) \qquad (1)+(2) \quad m_2 g - m_1 g = (m_1+m_2)\,a$

$$a = \frac{(m_2-m_1)\,g}{m_1+m_2} \qquad a(t=0) = \frac{m_2^{\circ} - m_1^{\circ}}{m_2+m_1}\,g \qquad a_{max}(m_1=0) = \frac{m_2^{\circ}}{m_2}\,g$$

$= g \approx 9.8\,m/s^2$

Scanned by CamScanner

$$\frac{dm_1}{dt} = -\lambda \qquad \int_{m_1^0}^{m} dm = \int_0^t -\lambda\, dt \longrightarrow \int dm = -\lambda \int_0^t dt \qquad m_1(t) - m_1^0 = -\lambda t$$

$$m_1(t) = m_1^0 - \lambda t \longrightarrow m_1(t_m) = m_1^0 - \lambda t_m = 0 \qquad t_m = \frac{m_1^0}{\lambda}$$

$t_{max} \longrightarrow$ لحظه‌ای که m_1 به صفر می‌رسد

ج) آهنگ تغییرات زمانی شتاب ظرف‌ها

$$\frac{da}{dt} = ? \qquad a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

(m_1: متغیر، m_2: ثابت)

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial m_1}\frac{\partial m_1}{dt} + \frac{\partial a}{\partial m_2}\frac{\partial m_2}{dt} \qquad \frac{da}{dt} = -\lambda \frac{da}{dm_1} =$$

$$-\lambda \left[\frac{-(m_1+m_2)-(m_2-m_1)}{(m_1+m_2)^2} \right] g = +\lambda \frac{2 m_2 g}{(m_1+m_2)^2} > 0 \qquad t=0 \Rightarrow m_2 = Const$$

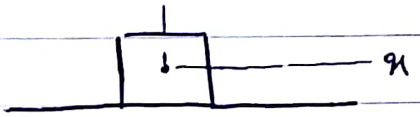
$$m_1(t=0) = m_1^0 \qquad t = 3\,sec \Rightarrow m = Const \qquad m_1(t=3) = ?$$

مشتق جزئی

$$f(h_1(t), h_2(t), \ldots) \qquad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial h_1}\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial h_2}\frac{\partial h_2}{\partial t} + \cdots = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial h_i}\frac{\partial h_i}{\partial t}$$

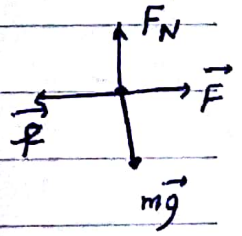
1. friction اصطکاک

2. عوامل و نیروهایی که موجب نیروی مرکزگرا (مرکز) می‌شوند $\quad a = -\frac{v^2}{R}\hat{r}_0$



$$x: \sum \vec{F}_x = m a_x$$

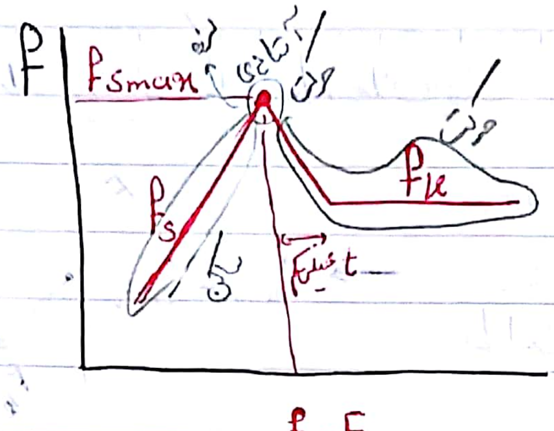
$$y: \sum \vec{F}_y = m a_y = 0 \longrightarrow$$ در راستا حرکت قائم نداریم



$$y: (F_N - mg)\hat{j} = 0 \Rightarrow F_N = m\vec{g}$$

$$x: (F - f)\hat{i} = m a_x \hat{i} = 0$$ هنوز حرکت نکرده (شتاب) $\quad F = f$

12/۱۲



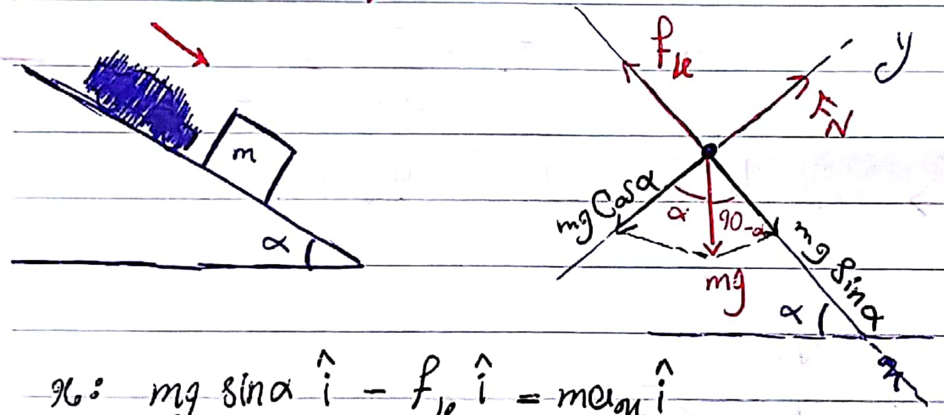
$f_{max} = F_e$

$$\downarrow\uparrow f \propto F_N \uparrow\downarrow$$

$$f = \mu F_N$$

$$f_{s\,max} = \mu_s \cdot F_N \qquad f_k = \mu_k \cdot F_N$$

$$\mu_s > \mu_k$$



$$x: \; mg\sin\alpha\,\hat{i} - f_k\,\hat{i} = m a_x\,\hat{i}$$

$$y: \; \vec{F}_N\,\hat{j} - m\vec{g}\cos\alpha\,\hat{j} = 0 \qquad \vec{F}_N = m\vec{g}\cos\alpha$$

$$f_k = \mu_k \cdot mg\cos\alpha \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu_k mg\cos\alpha = m a_x \longrightarrow$$

$a_x = g\,[\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha]$ حرکت به پایین $\Rightarrow a_x > 0 \Rightarrow \sin\alpha > \mu_k\cos\alpha$

$\rightarrow$ $\boxed{\tan\alpha > \mu_k}$ if $a_x = 0$ حرکت ساکن if $v_0 = 0$

حرکت با سرعت ثابت: if $v_0 = const > 0$ $\boxed{\mu_k = \tan\alpha}$

Scanned by CamScanner

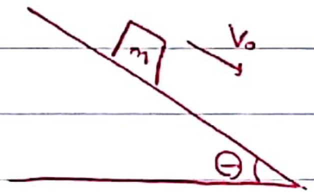
نکته: نیروی اصطکاک همواره خلاف جهت حرکت است که

می‌خواهد جسم را متوقف سازد.

$a_x > 0$ حرکت در جهت F شتاب می‌گیرد

جسم در جهت F شتاب $\to a_x < 0 \to$ نمی‌گیرد پس شتاب در خلاف جهت نیرو و حرکت مدام کند تر است.

$\longrightarrow F_k > F$ بررسی



$v_0 = const \; ; \; \vec{v} = v_0 \hat{i}$

if $a_x = 0 \Rightarrow \mu_k = \tan\theta$ حرکت با سرعت ثابت

if $a_x > 0 \Rightarrow \tan\theta > \mu_k$ حرکت شتابدار با شتاب $0 <$ (+) که افزایش سرعت

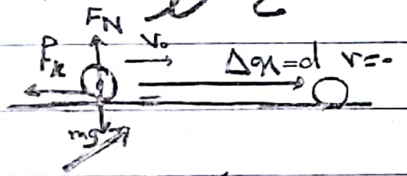
if $a_x < 0 \quad \mu_k > \tan\theta \longrightarrow a_x = -g[\mu_k\cos\theta - \sin\theta] < 0$

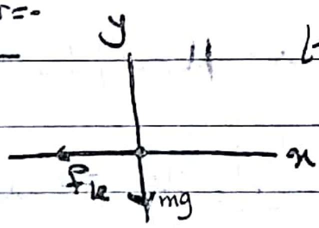
چند زمانی متوقف می‌شود؟ فرمول $\cancel{v} - v_0 = a_x T \qquad T = \frac{-v_0}{a_x} = -\frac{v_0}{-g[\mu_k\cos\theta - \sin\theta]}$

$= \frac{v_0}{g[\mu_k\cos\theta - \sin\theta]} > 0$ مسافت طی شده تا توقف ، $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$

$\Delta x = \frac{-v_0^2}{2a_x} = \frac{v_0^2}{2g[\mu_k\cos\theta - \sin\theta]}$

if $\to$ سطح افقی (تحت تاثیر نیروی اصطکاک نیست) $\Rightarrow \theta = 0 \qquad \sin\theta = 0 \; , \; \cos\theta = 1$





اگر بخواهیم جسم ساکن را بدون نیرو به حرکت درآوریم ، θ را زیاد کنید تا

یک سرعت اولیه v_0 می‌دهیم

زمان توقف $T \Rightarrow \cancel{v} - v_0 = a_x T \qquad \tan\theta \geq \mu_s$

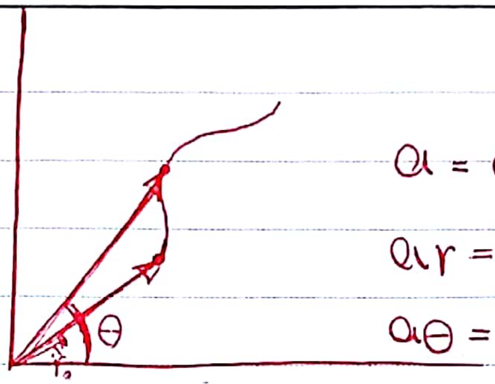
$T = \frac{-v_0}{a_x} = \frac{v_0}{\mu_k g}$

$-F_k = m a_x \Rightarrow a_x = -\mu_k m g$

$d = \frac{-v_0^2}{2a_x} = \frac{v_0^2}{2\mu_k g}$

Scanned by CamScanner

بررسی حرکت دایره‌ای و نیرو :



$a = a_r \hat{r}_\circ + a_\theta \hat{\theta}_\circ$ (the a_θ term is crossed out)

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ (the $\ddot{r}$ term is crossed out)

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ (the $r\ddot{\theta}$ term is crossed out)

$r = R = Const$ $v_B = v_{B/A} + v_A$

$a_B = a_{B/A} + a_A$

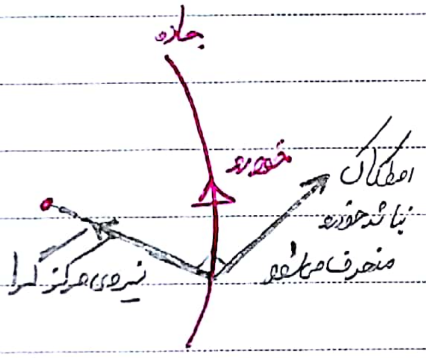
$\dot{\theta} = Const = \omega$ $v = r\dot{\theta} = r\omega = Const$ $a = a_r \hat{r}_\circ$

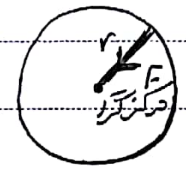
$= -R\dot{\theta}^2 \hat{r}_\circ = -\frac{v^2}{R}\hat{r}_\circ$ شتاب مرکزگرا $\boxed{a = -\frac{v^2}{R}\hat{r}_\circ}$

شتاب‌های $a = \frac{dv}{dt}$ $nt:$ $a = a_t e_t + a_n e_n$ ($a_t = \frac{dv}{dt}$, $a_n = \frac{v^2}{R}$) این توان

نکته: در حرکت دایره‌ای یک نیرو باید موجود باشد که به جسم شتاب بدهد که در حرکت دایره‌ای بماند.

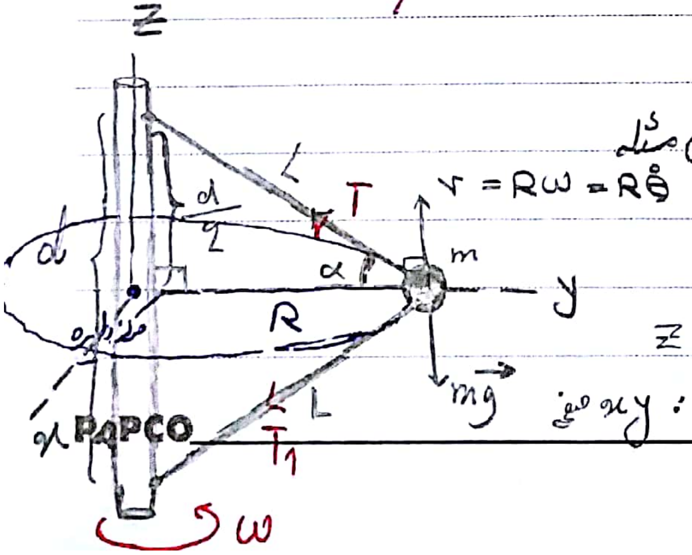
مثل اصطکاک چرخ و جاده برای خودرو، نیروی گرانش برای ماهواره، نیروی مغناطیسی برای e در اطراف هسته، نیروی کشش برای گوی متصل به طناب





$F_{مرکزگرا} = -F\hat{r}_\circ$

مثال ۹۵ هالیدی (فصل 5) خط مشکی: دانشجوهای مسئله



میله در حال چرخش

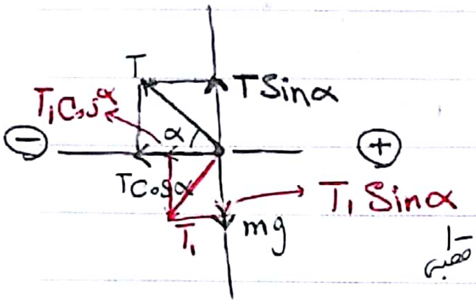
z :

صفحه xy : ⇒ استفاده از مختصات ← xy در حال چرخش

قطبی (مختصات استوانه‌ای)

Subject:
Date

استوانه‌ای : $(\hat{r}_0, \hat{\theta}_0, \hat{k})$ قطبی if $z=0 \to (\hat{r}_0, \hat{\theta}_0)$



در راستای Z: $T\sin\alpha - (mg + T_1\sin\alpha) = 0 \to (T-T_1)\sin\alpha = mg$ معادله (1)

مختصات قطبی xy $\Rightarrow \hat{r}_0 : F_r\hat{r}_0 = -\frac{mv^2}{R}\hat{r}_0$ معادله (2)

$-(T_1\cos\alpha\,\hat{r}_0 + T\cos\alpha\,\hat{r}_0)$ ← مرکزگرا $\to (T+T_1)\cos\alpha = \frac{mv^2}{R}$

(1) $\to T - T_1 = \frac{mg}{\frac{d}{2L}}$; $\sin\alpha = \frac{d}{2L}$

دو معادله و دو مجهول: T_1 and v

$\cos\alpha = \frac{R}{L}$ $\quad R = \sqrt{L^2 - \frac{d^2}{4}}$

$$\begin{cases} T + T_1 = \frac{mv^2}{R}\cdot\frac{L}{R} \\ T - T_1 = \frac{2L}{d}mg \end{cases}$$

جایگذاری — به دست می‌آید

داده‌ها: $m = 1.34\ kg$, $L = 1.70\ (m)$, $d = 1.70\ (m)$, $T = 35\ (N)$

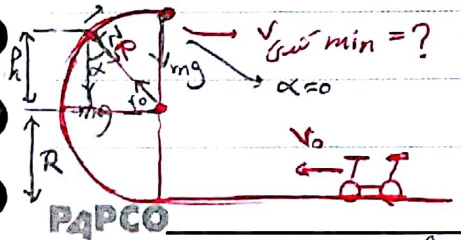
$T_1 = ?$
$v = ?$

$\vec{T}^N = T_r\hat{r}_0 + T_z\hat{k} = \sqrt{\left(\frac{mv^2}{R}\right)^2 + (mg)^2}$ (T_r, T_z)

نیروی خالص ناشی از $\vec{T}$ طناب $\to \vec{T}^N$

$T_z = (T - T_1)\sin\alpha$

$T_r = -(T+T_1)\cos\alpha \to (T+T_1)\cos\alpha = -T_r$



$v_{\text{تندی}}\ min = ?$ → هیچ‌وقت سقوط نکند

$\alpha = 0$

خلاف جهت $\hat{r}_0$

$\sum \vec{F}_C = -\frac{mv^2}{R}\hat{r}_0 \to -F_N\hat{r}_0 - mg\cos\alpha\,\hat{r}_0 = -\frac{mv^2}{R}\hat{r}_0$

$F_N + mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{R}$

$\cos\alpha = \frac{h}{R}$

α همه‌جا: زاویه بین شعاع و mg است.

Scanned by CamScanner

۹۴/۱۴

Subject:
Date

$H = h + R$ $\cos\alpha = \frac{h}{R}$ $H = R(1+\cos\alpha)$ $\frac{mv^2}{R} = F_N + mg\frac{h}{R}$

$\xrightarrow{\times \frac{R}{m}}$ $v^2 = \frac{R}{m}F_N + gh$ $v = \sqrt{gh + \frac{R}{m}F_N}$

$F_N = 0 \rightarrow$ آستانه‌ی جدایی

$F_N \geqslant 0 \rightarrow$ جسم روی سطح می‌ماند $\rightarrow$ $v_{min} = \sqrt{gh}$ ($F_N = 0$)

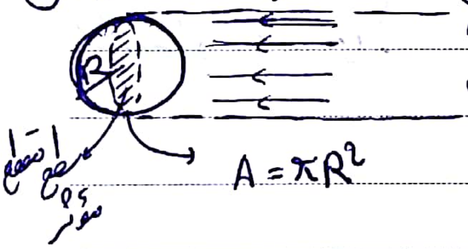
بالاترین نقطه $\rightarrow$ $v_{min} = \sqrt{gR}$ ($h = R$)

$$D = \frac{1}{2} C \rho_a A V^2$$

- C: ضریب کشش — ثابت هوا → Tensile coefficient
- ρ_a: چگالی شاره — ساده‌ترین هوا → Air Density
- A: سطح مقطع مؤثر از جسم که به هوا برخورد می‌کند
- V^2 → Speed
- D: مقاومتی که هوا در مقابل حرکت ایجاد می‌کند

$0.4 < C < 1$ → بستگی به شکل هر جسم دارد

توپ بیسبال

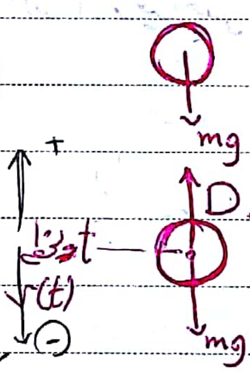


$A = \pi R^2$

$D \propto \rho_a$

$D \propto A$

$D \propto V^2$



$D = \frac{1}{2} C \rho_a A V^2(t)$

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$D\hat{j} - mg\hat{j} = -ma_y\hat{j}$

$D - mg = -ma_y$ → $t = 0 \rightarrow D = 0$ ($v_0 = 0$) ; $mg = ma_y$; $g = a_y$

$t > 0 \rightarrow v > 0 \rightarrow D > 0$

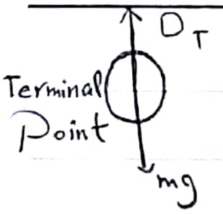
$\uparrow D - \underset{\text{ثابت}}{mg} = -ma_y \downarrow$; $\frac{dv_y}{dt}$ ← پس آهنگ افزایش سرعت کندتر و کمتر می‌شود

$a_y = g - \frac{D}{m}$ ← شتاب سقوط آزاد

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date



$v(t_T) = V_T$ تندی حدی Terminal Speed

$D_T = \frac{1}{2} C \rho_a A V_{(T)}^2$ $\quad D_T = mg$

$a_y = 0$ ← دیگر نیرویی به جسم وارد نمی‌شود

$\vec{F} = m\vec{a} = 0 \rightarrow \vec{F} = 0$

زبان فیزیکی ← Oh — yes!

و کاری کرد که v و D زیاد شوند تا جایی که $D = mg$ پس دیگر نیرویی وارد نمی‌شود به جسم

if $t \rightarrow t_T$ (سرعت حدی) $: D \rightarrow D_T \Rightarrow a_y = g - \frac{D_T}{m} = 0$ $\quad D_T = mg = \frac{1}{2} C \rho_a A V_T^2$

$$V_T = \sqrt{\frac{2D_T}{C\rho_a A}} = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho_a A}}$$

یک قطره‌ی باران با $r = 1.5\,mm$ ($1.5 \times 10^{-3}\,m$) از ابری به ارتفاع بلندی $1200\,m$ به پایین می‌افتد. فرض کنید ضریب کشش هوا 0.60 باشد، چگالی آب $1000\,\frac{kg}{m^3}$ و چگالی هوا $1.2\,\frac{kg}{m^3}$ است. سرعت حدی و میزان جابجایی تا رسیدن به این سرعت حدی؟

ابر

قطره mg } $h = ?$

1200 m

O $v_T = 7.4$

تندی حدی $V_T = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho_a A}}$ $\quad A = \pi r^2 = \pi \times (1.5)^2 \times 10^{-6}$

$m = \rho_w V_m$, $V_m = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$V_T = \sqrt{\frac{2 \times \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_w g}{C \rho_a \pi R^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 4 \times 1.5 \times 10^{-3} \times 10 \times 1000}{0.60 \times 1.2}} = 7.4\,m/s$$

$$\sqrt{\frac{1000}{6}} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}} \times 10 \times 1.5}{\frac{6}{10} \times 1.2}$$

(1.5 → 15 → 5; 1.2 → 12 → 4)

$\begin{cases} v^2 - v_0^2 = -2gh \\ D = 0 \end{cases}$

$$v = \sqrt{-2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times (-1200)} = \sqrt{24 \times 1000} \simeq 153\,m/s$$

PAPCO

15/15

Subject:
Date

سؤال ازما نخواستیم

$a_y = g - \frac{D}{m}$ $v_y^2 - v_0^2 = 2 a_y \Delta y$ (1) : ما خودمان میخواهیم h را پیدا کنیم

Consta

دیگر ارتفاع بر حسب $v(t)$ می‌رسیم

$D(v) = \frac{1}{2} C \rho_a A v^2$

$a_y(v)$

متفاوت و در حال تغییر در هر لحظه

شکل نمی‌تواند

از (1) نمی‌توان استفاده کرد

$a_y = \frac{dv_y}{dt} = g - \frac{D}{m}$

$dv = (g - \frac{D}{m}) dt$ $dt = \frac{dv}{g - \frac{D}{m}} \xrightarrow{\int_{v=0}^{v}} \int_{0=v}^{v} \frac{dv}{g - \frac{D}{m}} =$

$\int_0^v \frac{dv}{g - \frac{C\rho_a A v^2}{2m}} = \int_0^v \frac{dv}{g[1 - \frac{C\rho_a A v^2}{2mg}]}$ ($\frac{C\rho_a A v^2}{2mg} = u^2$)

$u = \sqrt{\frac{C\rho_a A (v^2)}{2mg}} \to v = Bv$ (B) $\int_0^t dt = t$

$du = B dv$ $\int_{0=u}^{u} \frac{du}{1 - u^2} = gBt \Rightarrow v(t)$

حل انتگرال بدست آمده $\to v(t)$ $v(t) = \frac{dx}{dt}$ $\xrightarrow{\text{انتگرال}}$

• Work and Energy : Seventh Edition

• Kenetic Energy

$K = \frac{1}{2} m v^2 \to 1J = 1(kg \cdot \frac{m^2}{s^2})$

$\vec{F} = m\vec{a} \xrightarrow{\text{تغییرات سرعت}} K_i = \frac{1}{2} m v_i^2 \Rightarrow K_f = \frac{1}{2} m v_f^2$

کار $\Rightarrow$ $W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$ (N.m)

نیرو

F ثابت: برای یک نیروی ثابت

PAPCO

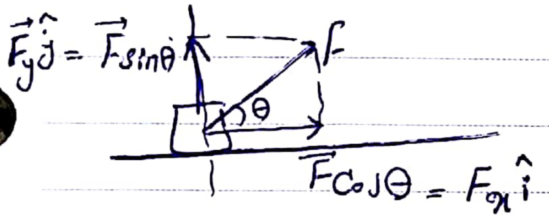
Scanned by CamScanner

Subject:
Date

$$w = F_x \Delta x + \cancel{F_y \Delta y} + \cancel{F_z \Delta z}$$

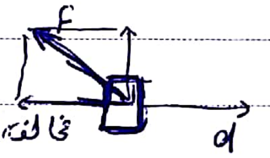
w_x — بررسی های ما ← جابجایی نداریم

$$\vec{F} : (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) \qquad \vec{\Delta r} = (\Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k})$$



$$\vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = |\vec{F}| |\vec{\Delta r}| \cos\theta$$

$$\begin{cases} \theta < \frac{\pi}{2} & \cos\theta > 0 \longrightarrow w > 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} & \cos\theta = 0 \longrightarrow w = 0 \\ \theta > \frac{\pi}{2} & \cos\theta < 0 \longrightarrow w < 0 \end{cases}$$



تغ الغذا ← مثل یک نیروی اصطکاک عمل می‌کند.

$$\vec{F} \text{ const} \longrightarrow w = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$$

کار کل جمع برداری کار تک تک نیروهاست. نیرو هم (اصل) نه کار $\quad w_T = w_1 + w_2 + \cdots$

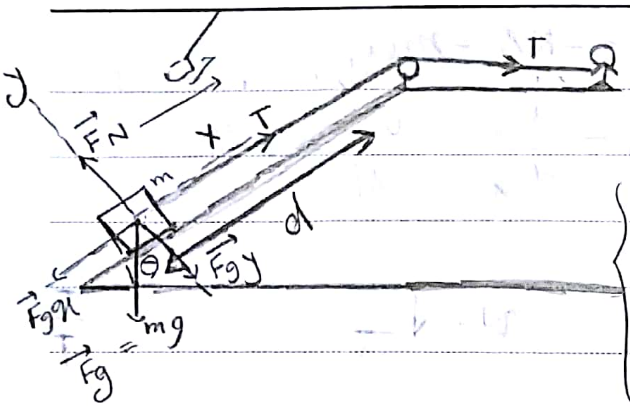
ارتباط بین W و K : $\quad F = m\vec{a} = \text{Const} \qquad \frac{1}{2} m (v_x^2 - v_{0x}^2) = (2 a_x \Delta x) \times \frac{1}{2} m$

$$\frac{1}{2} m v_x^2 - \frac{1}{2} m v_{0x}^2 = \underbrace{m a_x}_{F} \Delta x \longrightarrow K_f - K_i = \Delta K = W$$

Scanned by CamScanner

16 | ۱۶

Subject:
Date



فرض: اصطکاک نداریم $\mu_k = 0$

$$\begin{cases} \vec{F}_g = -mg\sin\theta\,\hat{i} - mg\cos\theta\,\hat{j} \\ \vec{F}_N = F_N\,\hat{j} \\ \vec{T} = T\hat{i} \end{cases}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_N - mg\cos\theta = 0 \longrightarrow \boxed{F_N = mg\cos\theta}$$

$$W_g = \vec{F}_g \cdot \vec{\Delta r} = (-mg\sin\theta\,\hat{i} - mg\cos\theta\,\hat{j}) \cdot d\hat{i} = -mg\,d\sin\theta + 0$$

$\hat{i} \perp \hat{j}$ ، $W_g y$

$$W_N = \vec{F}_N \cdot \vec{\Delta r} = 0$$ ← در راستای جابجایی حرکت نداریم

$$W_T = \vec{T} \cdot \vec{\Delta r} = T\hat{i} \cdot d\hat{i} = Td$$

$$W = W_T + W_g + W_N + W_f = Td - mgd\sin\theta = (T - mg\sin\theta)d$$

(W_f: اصطکاک نداریم)

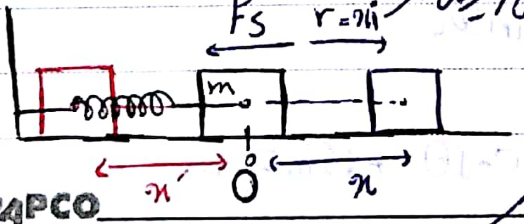
$$W_{net} = (T - mg\sin\theta)\,d$$

$$F_{net} = F_w + F_N + T = (-mg\sin\theta + T)\hat{i} + (F_N - mg\cos\theta)\hat{j}$$

$$\vec{\Delta r} = d\hat{i} \Rightarrow W = \vec{F}_{net} \cdot d\hat{i} = (T - mg\sin\theta)\,d\,\underbrace{(\hat{i}\cdot\hat{i})}_{1}$$

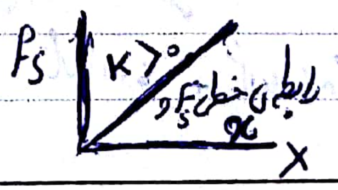
$\vec{\Delta r}$ ← در $\hat{j}$ کاری نداریم

حالا فرض کنیم نیرو Const نباشد. ← مثل نیروی فنر / نیروی فنر F_s ، $\vec{r} = x\hat{i}$



F_s : فنر

$$F_s \propto -x$$



رابطه خطی F_s و x ، $K > 0$

$\vec{r} = -x\hat{i}$ ، F_s

هوک: $\vec{F}_s = -K\vec{X}$

ثابت

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date: $\Delta x \neq x$ خلاف علامت

$$\vec{F}_s = -F_s \hat{i} = -kx\hat{i}$$

$x = x\hat{i}$ فرض جابجایی مثبت

$$F_s = -kx = ma_x$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt_x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$\frac{m\ddot{x}}{m} = \frac{-kx}{m}$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$

($\ddot{x}$: a ، $\frac{k}{m}$: w^2)

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad w = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

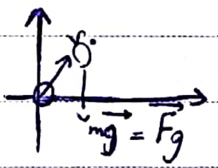
معادله دیفرانسیلی ← نیروی متغیر وابسته به مکان ← پیچیده‌تر

اگر جسم حرکت پرتابی داشته باشد (دو بعدی) x, y

$$m\ddot{x} = 0 \longrightarrow \dot{x} = v_x = \text{Const} \longrightarrow \ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{y} = -mg$$

$$\ddot{y} = -g$$



سرعت $\dot{y} = -gt + C$ ($C = v_{0y}$) $\qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0$

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \qquad r_1, r_2 = \text{Const} \qquad \omega^2 = \frac{k}{m} > 0$$

$$\dot{x} = r \qquad \ddot{x} = r^2 \quad , \quad x \longrightarrow 1$$

$$r^2 + \omega^2 = 0 \qquad r^2 = -\omega^2 \qquad r = \sqrt{-\omega^2} = \sqrt{-1}\,\omega = i\omega$$

($\sqrt{-1} = i$ ← اعداد مختلط)

$$x(t) = Ae^{+i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

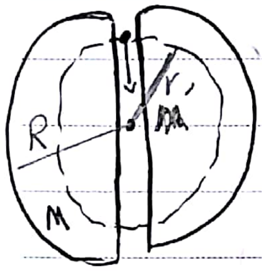
$Ae^{+i\omega t}$ → $\cos\omega t + i\sin\omega t$ ، $Be^{-i\omega t}$ → $\cos\omega t - i\sin\omega t$

نکته: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

PAPCO

Scanned by CamScanner

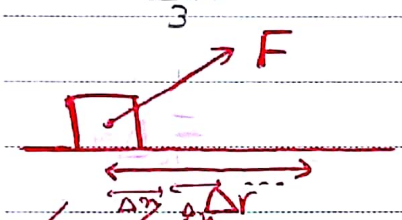
مثال) ثابت کنید که افتادن (سقوط جسم) به سمت مرکز زمین یک حرکت نوسانی است!



$r > R \rightarrow F_g = (-)\frac{GmM}{r^2}$ (بردار داخل)

$r < R \qquad M' = \frac{4\pi}{3}\rho r^3 = M\frac{r^3}{R^3} = M'$

$\rho = \frac{M}{\frac{4\pi R^3}{3}}$



$\Delta W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$

می‌توان برای محاسبه‌ی کار کل بازه‌ی بزرگ را به چندین بازه‌ی کوچک تقسیم کرده کار را در بازه‌های کوچک محاسبه کرده و سپس جمع کنیم

$W = \sum \vec{F_i} \cdot \vec{\Delta r_i} \rightarrow$ اگر بازه‌ها (Δx ها) کوچکتر شوند تبدیل به انتگرال می‌شود (dx)

$\int dW = W = \int \vec{F} \cdot \vec{dr}$

1. کار انجام شده توسط یک نیروی متغیر مکانی $F(x)$

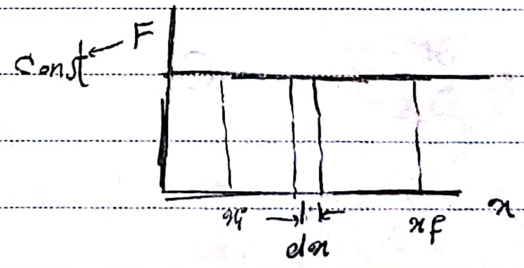
2. کار انجام شده در سه بعد

3. کار انجام شده توسط نیروی فنر

4. قضیه‌ی کار - انرژی جنبشی

5. توان

$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta x}$

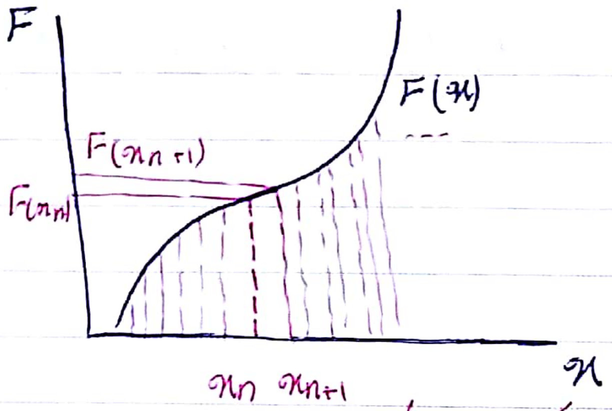


PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject :
Date

نیروی متغیر در دو بعد.



$$F_n = F(x_n)$$

$$F_{n+1} = F(x_{n+1})$$

$$F(x_n) \approx F(x_{n+1})$$

تقریب زدن ← کوچک کردن بازه‌ها

$$\begin{cases} \Delta x = x_{n+1} - x_n \\ \Delta x = x_{n+2} - x_{n+1} \end{cases}$$

$$\Delta W = F(x_n)\,\Delta x = F_n \Delta x$$

$$W = \sum_{n=i}^{f} W_n = \sum_{n=i}^{f} F_n \Delta x \longrightarrow W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{n=i}^{f} F(x_n)\,\Delta x =$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx \qquad dW = F\,dx$$

بسط تیلور: $F(x + dx) = F(x) + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + \cdots \longrightarrow$ فرض

از مشتق جزئی دوم به بعد کوچک و قابل نادیده گرفتن

$$\approx F(x) + \frac{\partial F}{\partial x} dx + 0 \longrightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

$$\left(F(x+dx) = F(x) + \frac{\partial F}{\partial x} dx\right) \times dx = F(x+dx)\,dx = F(x)dx + \frac{\partial F}{\partial x}(dx)^2$$

$$\longrightarrow F(x+dx)\,dx = \underbrace{F(x)dx}_{dW}$$

P4PCO

Scanned by CamScanner

18/11

Subject:
Date

نیروی متغیر در سه بعد:

$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr} \qquad \vec{F} = \vec{F}_x \hat{i} + \vec{F}_y \hat{j} + \vec{F}_z \hat{k}$

$\vec{dr} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

$W = \int dW = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$

$f(x) = f(\overset{x}{\overbrace{(t)}}) \longrightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$

$f(x, y, z) \Rightarrow df = ? \longrightarrow df \Rightarrow f(x+dx, y+dy, z+dz) =$

$f(\overset{x,y,z}{\vec{x}}) + df \longrightarrow = f(x, y, z) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz}_{\underset{\hat{f}}{d(x,y,z)}}$

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x \qquad a_x = a_x(x) \; ; \; x(t)$

$v_x = v_x(x(t))$

$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y$

$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z$

PAPCO

Subject:
Date

$$W = m\int \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x \, dx + m\int v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + m\int v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} dz$$

$$\longrightarrow W = m\int_{v_{xi}}^{v_{xf}} v_x \, dv_x + m\int_{v_{yi}}^{v_{yf}} v_y \, dv_y + m\int_{v_{zi}}^{v_{zf}} v_z \, dv_z$$

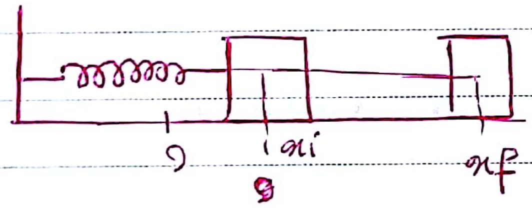
$$\rightarrow \frac{1}{2} m \left[v_{xf}^2 - v_{xi}^2\right] + \frac{1}{2} m \left[v_{yf}^2 - v_{yi}^2\right] + \frac{1}{2} m \left[v_{zf}^2 - v_{zi}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} m \left[v_{xf}^2 + v_{yf}^2 + v_{zf}^2\right] - \frac{1}{2} m \left[v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2}_{k_f} - \underbrace{\frac{1}{2} m |\vec{v}_i|^2}_{k_i} = \boxed{k_f - k_i = W}$$

قضیه کار و انرژی جنبش برای نیروها متغیر در سه بعد

فنر $\vec{F} = -k\vec{x}$

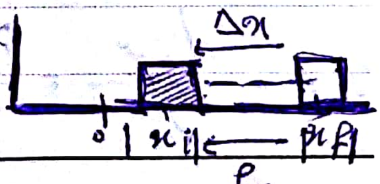


$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x')\, dx' = \int_{x_i}^{x_f} -kx' dx'$$

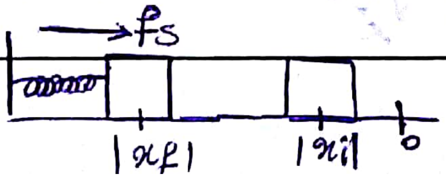
$$= -\frac{1}{2} k \left[x_f^2 - x_i^2\right] = -\frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2)$$

$$W_s = -\frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2)$$

if $x_f > x_i \Rightarrow W_s < 0$



if $x_f < x_i \Rightarrow W_s > 0$



PAPCO

Scanned by CamScanner

میانترم تا آخر فصل ۹ ـــ مرکز جرم و تکانه خطی

$$\begin{cases} \text{if} \quad |x_f| > |x_i| \Rightarrow w_s < 0 \\ \text{if} \quad |x_f| < |x_i| \Rightarrow w_s > 0 \end{cases}$$

$$P_{avg} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \Delta t \to 0 \ , \ \lim_{\Delta t \to 0} P_{avg} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$= \frac{dW}{dt} \qquad W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$P = \frac{(F_x dx + F_y dy + F_z dz)}{t} \Rightarrow P = F_x \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{V_x} + F_y \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{V_y} + F_z \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{V_z} = F_x V_x + F_y V_y + F_z V_z =$$

$$(F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) \cdot (V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}) \Rightarrow$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

به نام خدا

1. تعریف انرژی پتانسیل
— کار و انرژی پتانسیل
2. نیروهای پایستار
حفظ * عدم نیروهای پایستار بر مسیر
وابستگی
3. محاسبه‌ی انرژی پتانسیل گرانشی و کشسانی
4. انرژی مکانیکی و پایستگی آن
5. رابطه‌ی نیروهای پایستار و انرژی پتانسیل

Scanned by CamScanner

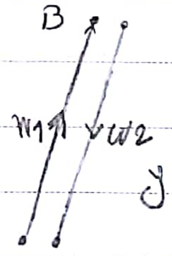
Subject:
Date

$\Delta K = W \longleftrightarrow \Delta U = -W$

کار انجام شده توسط نیرو در یک مسیر مستقیم برای تغییر انرژی جنبشی (یا پتانسیل) W_1

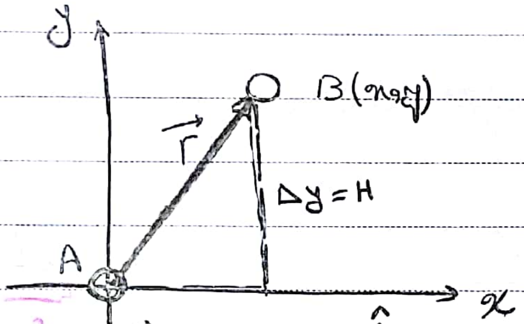
W_2 کار انجام شده توسط همان نیرو برای تبدیل جنبشی به پتانسیل یا به عکس

$W_2 = -W_1$
نیروی پایستار



$W_g = +\int_A^B \vec{F_g} \cdot \vec{dr} = \int -mg\,\hat{j} \cdot (dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}) =$

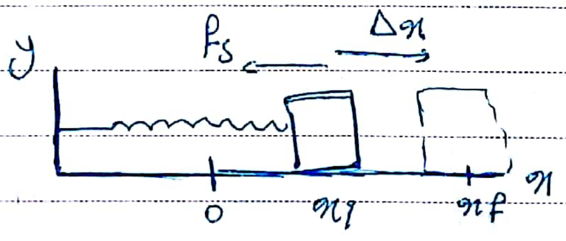
$-mg \int_{y_i}^{y_f} dy\,\hat{j} = -mg\,\Delta y$



$\vec{F_g} = mg = -mg\hat{j}$; $\vec{dr} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}$

$\vec{r_i} = 0 \qquad \vec{r_f} = (x,y) = x\hat{i} + y\hat{j} \qquad W_g = -mg\,\Delta y = -mg(H-0) = -mgH$

$\longrightarrow W_g = -mgH = -mg\,\Delta y \qquad \Delta U = +mg\,\Delta y \longrightarrow U_f - U_i = mgy_f - mgy_i$



$F_s = -Kx$

$\vec{F_s} = -kx\,\hat{i}$

$\Delta U = -W_s = -\int_{x_i}^{x_f} -kx\,dx \longrightarrow$

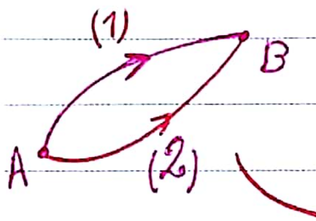
$\Delta U = \frac{1}{2} k (x_f - x_i)^2 \qquad U_0 \longrightarrow x_i = 0 \longrightarrow U = \frac{1}{2}kx^2$

P4PCO

Scanned by CamScanner

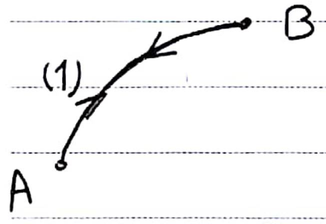
کار انجام شده توسط نیروی پایستار در یک مسیر بسته صفر است.

$w = w_1 + w_2 = 0$



$W_{AB}^{(1)} \overset{?}{=} W_{AB}^{(2)}$

$W_{AB}^{(1)} + W_{BA}^{(2)} = 0 \qquad W_{AB}^{(1)} = -W_{BA}^{(2)}$



$W_{AB}^{(1)} + W_{BA}^{(1)} = 0 \qquad W_{AB}^{(1)} = -W_{BA}^{(1)}$

نتیجه گیری

$W_{BA}^{(1)} = W_{BA}^{(2)}$

$W_{AB}^{(1)} = W_{AB}^{(2)}$ ⟸ اگر نیروهای وارد بر یک سامانه فقط از نوع نیروهای پایستار باشد، کار انجام شده توسط آنها به مسیر انتخابی بستگی ندارد.

انرژی مکانیکی

$E_m = K + U \qquad \Delta U = -\Delta K = -W$

$U_f - U_i = -(K_f - K_i) \longrightarrow \underbrace{U_f + K_f}_{E_{mf}} = \underbrace{U_i + K_i}_{E_{mi}}$

$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \Delta U = \int_{U_i}^{U_f} dU = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$

یک بعدی $F = F_x \hat{i}$

$dU = -F\,dx \longrightarrow F = -\frac{dU}{dx} \longrightarrow$ مشتق U نسبت به x

یک بعدی ⟸ مشتق جزئی = مشتق کامل

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

$$f(x) \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}dx \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f(x,y,z) \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$U(x,y,z) \Rightarrow du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$dr = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k} \longrightarrow du = \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}\right]}_{\vec{\nabla} u} \cdot \underbrace{\left[dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}\right]}_{\vec{dr}}$$

گرادیان U.

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

گرادیان تابع

$$du = \vec{\nabla} u \cdot \vec{dr} \qquad F\cdot\vec{dr} = -\vec{\nabla} u \cdot \vec{dr} \qquad \boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} u}$$

$$\vec{F} = \vec{F_x}\,\hat{i} + \vec{F_y}\,\hat{j} + \vec{F_z}\,\hat{k} = -\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}$$

$$F_x = -\frac{\partial u}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \qquad F_x = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{du}{dx}$$

مثال از مشتق جزئی

$$U(x,y) = \frac{1}{2}kx^2y + \frac{3}{2}bxy^2$$

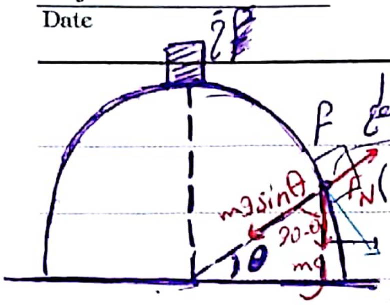
$$\begin{cases} -F_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = kxy + \dfrac{3}{2}by^2 \\ -F_y = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}kx^2 + 3bxy \end{cases}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

21/۲۱ مسائل مهم فصل ۷: ۱۶، 21، 26، 31، 33، 39، 42، 47، 48، 57، 62، 65، 81، 82

Subject:
Date



θ_0 $F_N \leqslant 0$

نیروی مرکزگرا در عمل وجود ندارد چون از برآیند نیروهای در راستای مرکز به وجود می‌آید.

$\sin\theta = \frac{h}{R}$ $h = R\sin\theta$

$\sin\theta = \frac{h\, mg \sin\theta}{R} = hR$

$$\sum F_C = -\frac{mv^2}{R}\hat{r}_0$$

$$-mg\sin\theta\,\hat{r}_0 + F_N\hat{r}_0 = -\frac{mv^2}{R}\hat{r}_0 \qquad F_N = mg\sin\theta - \frac{mv^2}{R}$$

در بررسی مسائلی است که نیروی اصطکاک نداریم.

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{a} = a_r\hat{r}_0 + a_\theta\hat{\theta}_0$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

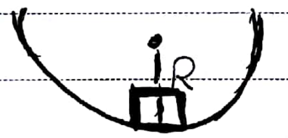
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \rightarrow \text{ثابت } r$$

صفر نیست زیرا شتاب در حالت عمودی است و سرعت ثابت نیست

$$mg\cos\theta = r\ddot{\theta} \longrightarrow v = r\dot{\theta} = r\omega$$

if $\longrightarrow$ $F_N = mg\sin\theta \oplus \frac{mv^2}{R} \neq 0 \xrightarrow{\text{معنا}}$ جسم هیچوقت از سطح جدا نمی‌شود.

مثال



$$F_N = 0 \longrightarrow g\sin\theta = \frac{v^2}{R} \qquad v^2 = Rg\sin\theta = gh$$

$$h = R\sin\theta$$

$$E_i = E_f \qquad mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \quad (v^2 = gh)$$

$$mgR = \frac{3}{2}mgh \qquad h = \frac{2}{3}R \qquad R\sin\theta = \frac{2}{3}R$$

PAPCO

$$\sin\theta = \frac{2}{3} \qquad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

فصل ۸:

1. کار انجام شده توسط نیروی خارجی

2. قانون پایستگی انرژی

3. مرکز جرم

$F_{ext} - F_k = ma \qquad a = \frac{F_{ext} - F_k}{m}$

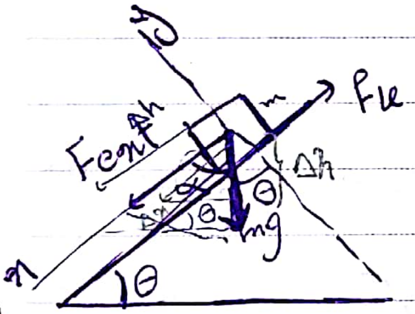
ثابت

F_k , F_{ext} : ثابت آنگاه $\longrightarrow (v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x) \times \frac{1}{2}m \qquad k_f - k_i = ma\Delta x$

$k_f - k_i = (F_{ext} - F_k)\Delta x = \underbrace{F_{ext}\Delta x}_{W_{ext}} - \underbrace{F_k \Delta x}_{W_f} = \Delta k$

$\Delta k = W_{ext} + W_f$ (خارجی) $\qquad W_f = -F_k\Delta x \qquad W_{ext} = \Delta k - W_f$

$W_{ext} = \Delta k + \Delta E_{th} \qquad \Delta E_{th} = -W_f > 0$



$F_{xg} = F_g \cos\alpha = F_g \sin\theta \qquad \sin\theta = \frac{\Delta h}{\Delta x} \qquad \Delta h = \sin\theta\,\Delta x$

$$W_g = \vec{F_g} \cdot \vec{\Delta r} = \vec{F_g}\,\underbrace{\Delta x \sin\theta}_{\Delta h}$$

$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = ma\Delta x = F\Delta x \qquad k_f - k_i = (F_{ext} - F_g\sin\theta - F_k)\Delta x = -\Delta U_g = F_{ext}\Delta x + W_g + W_f$

$\Delta K = W_{ext} + \underbrace{W_g}_{-\Delta U} + \underbrace{W_f}_{-\Delta E_{th}}$

$W_{ext} = \Delta k + \Delta U + \Delta E_{th} + \Delta E_{in}$ (انرژی گرمایی، انرژی داخلی)

$E = K + U + E_{th} + E_{in}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

22/۲۲

Subject:
Date

$W_{ext} = \Delta E_m + \Delta E_{th} + \Delta E_{in} \longrightarrow W_{ext} = \Delta E$

↳ سامانه‌ای اجسام

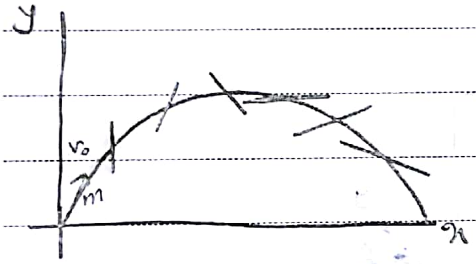
$if \; W_{ext} = 0 \longrightarrow E_f = E_i$

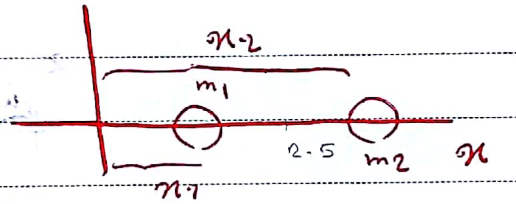
→ $\Delta E = 0$ → $if \; W_f = 0 \xrightarrow{\text{فرض}} E_{in}$ ثابت

↓ سیستم کاملاً ایزوله

$0 = \Delta K + \Delta U \qquad \Delta K = -\Delta U \longrightarrow \Delta E_{mec} = 0$

مرکز جرم: توضیح: اگر جسم ذره‌ای نباشد در حال حرکت چرخشی داره اما یک نقطه از آن روی مسیر می‌ماند ثابت که آن مرکز جرم است.

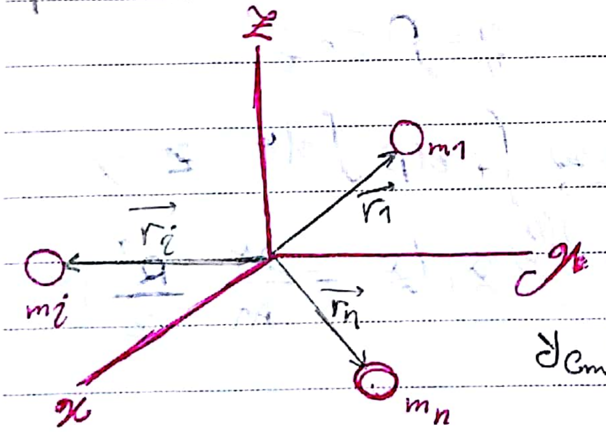




فاصله مرکز جرم از مبدأ

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$\sum_{i=1}^{n} m_i \to M$



$$r_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad z_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k} = \frac{1}{M}\left[\sum m_i x_i \hat{i} + \sum m_i y_i \hat{j} + \sum m_i z_i \hat{k}\right]$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \underbrace{\left[x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}\right]}_{\vec{r}_i}$$

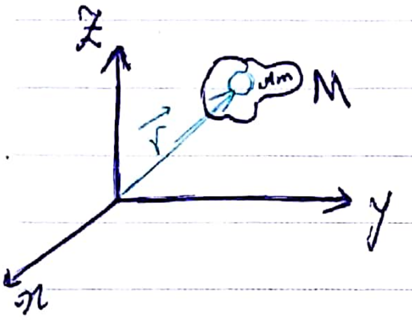
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int dm\,\vec{r}}{\int dm}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i \qquad M = \sum m_i \qquad dm \sim m_i$$



$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum dm\,\vec{r} \qquad M = \int dm$$

($M = \int dm$)

$dm = \sigma\, dA$ چگالی سطحی

$dm = \rho\, dv$ چگالی حجمی (A) if ⇒ $\rho = const$

$dm = \lambda\, dl$ چگالی خطی (dl یا dx)

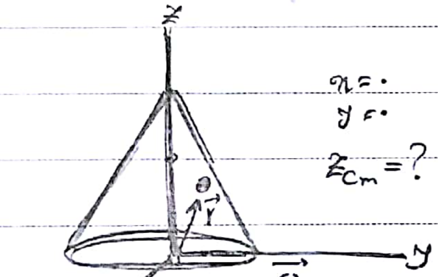
$$\rho = \frac{dm}{dv} = \frac{M}{V}$$

(B) $\rho \neq const$

$\rho(\vec{r})$

[illegible]

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\rho}{\rho\int dv}\int (\rho\, dv)\,\vec{r}$$

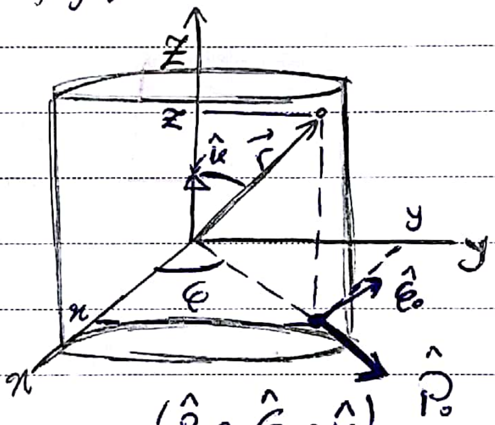


$x = 0$

$y = 0$

$z_{cm} = ?$

$$z_{cm} = \frac{\rho}{M}\int z\, dv$$



$(\hat{\rho}, \hat{e}_\varphi, \hat{k})$

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{r}$$

$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi$

مختصات استوانه‌ای ⇒ $dv = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$

[illegible] $\int \rho\, d\rho \int d\varphi \int z\, dz$

استوانه باشد

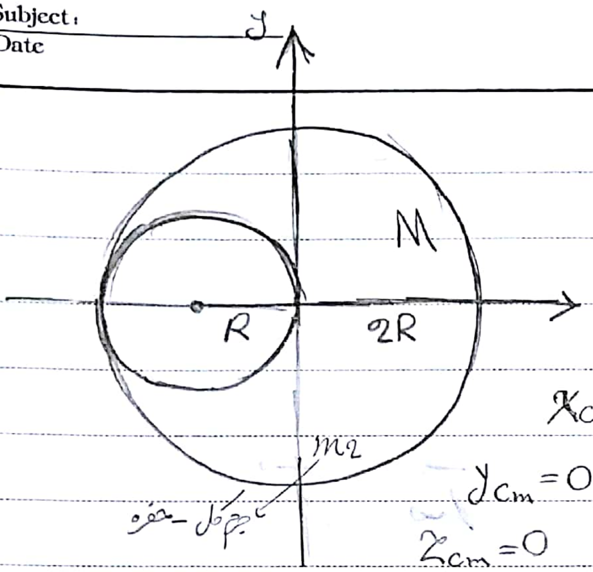
$$\int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{l} z\, dz = \frac{M}{M}\,\frac{R^2}{2}(\pi)\, l\,\frac{l}{2} =$$

$$\frac{l}{2}$$

P4PCO

23/۲۳

Subject:
Date:



$\sigma = const$

ما نسبت به محور x تقارن داریم

مرکز جرم را روی محور x بررسی می‌کنیم

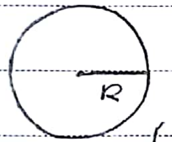
$x_{cm} = ?$

$y_{cm} = 0$

$z_{cm} = 0$

if دایره کامل $\tilde{X}_{cm} = 0$

big مرکز جرم

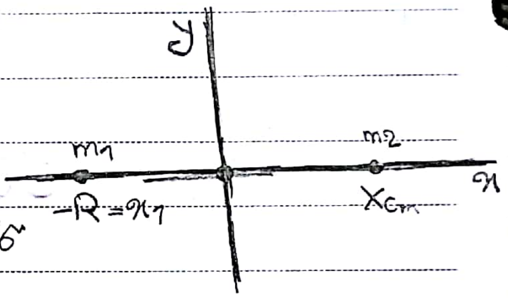


$m_1 = (\pi R^2)\sigma$

چگالی سطحی

$M = 4\pi R^2 \sigma$

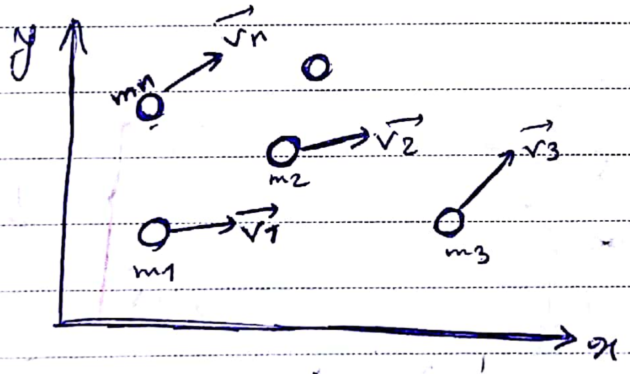
$m_2 = M - m_1 = 3\pi R^2 \sigma$



$\tilde{X}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 X_{cm}) = 0$ $\quad -m_1 R + (+m_2 X_{cm}) = 0$

$-(\pi R^2)\sigma R + (3\pi R^2 \sigma X_{cm}) = 0$ $\quad -R + 3X_{cm} = 0$ $\quad X_{cm} = \frac{R}{3}$

96.08.29



$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{a}_i$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

$$M\vec{a}_{cm} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

$\overleftarrow{F}_{12}$ ⊙ m_1 ⊙ m_2 $\vec{F}_{21}$

$$\vec{F}_{net} = \underbrace{(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \cdots)}_{0} + \vec{F}_{ext}$$

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_{ext} = \sum \vec{F}_i = M\vec{a}_{cm} = \sum m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{a}_{cm} = 0 \longrightarrow \vec{v}_{cm} = Const$$

m_1 ○ ⟶ $\vec{v}_1 = Const$ ✕ Cm 88 $\vec{v}_i = 0$ ← سرعت همه ذرات این

$$\vec{F}_{ext} = 0 \rightarrow \vec{a}_{cm} = 0$$

مرکز جرم

$$M\vec{V}_{cm} = \sum m_i \vec{v}_i = m_1 v_1 + m_i \vec{v}_i = m_1 v_1$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{V}_{cm} = \frac{m_1}{M} V_1} = Const$$

center mass

جهت P همواره با V یکی است

$$\vec{P} = \overset{+}{m} \vec{V}$$

ثابت

تکانه:
1. خطی ← حرکت روی مسیر مستقیم ← $\vec{P} \propto \vec{V}$
2. زاویه‌ای ← 〃 〃 〃 دایره‌ای یا زاویه‌دار

V بر حسب

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow v = c \longrightarrow M \rightarrow \infty$$

$$\vec{P}_i = m\vec{v}_i \qquad \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i$$

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = M\vec{V}_{cm} \qquad V_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i v_i$$

t

Scanned by CamScanner

24/۲۴

Subject:
Date

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum m_i \underbrace{\frac{d\vec{v}_i}{dt}}_{a_i} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm}$$

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext} = \sum \vec{F}_i \qquad \boxed{\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

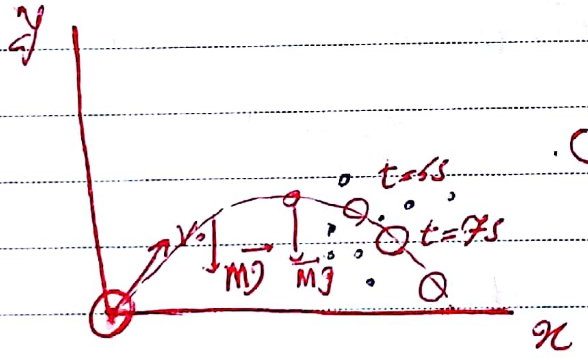
$$\vec{F}_{ext} = 0 \longrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \longrightarrow P = const \quad \vec{P} = M\vec{v}_{cm} = \sum m_i \vec{v}_i$$

$$P_{final} = P_{initial}$$

مثال توپ بیلیارد پس $\Rightarrow \sum m_i v_i'$ $\qquad \vec{P}_{final} = P_1' + P_2' + \cdots + P_n'$

برخورد m_1 به بقیه — سرعت پس از برخورد ذره ها

$$m_1 v_1 = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i'$$



فرض: تنها نیروی خارجی نیروی گرانش است.

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{cm} = -Mg\hat{j}$$

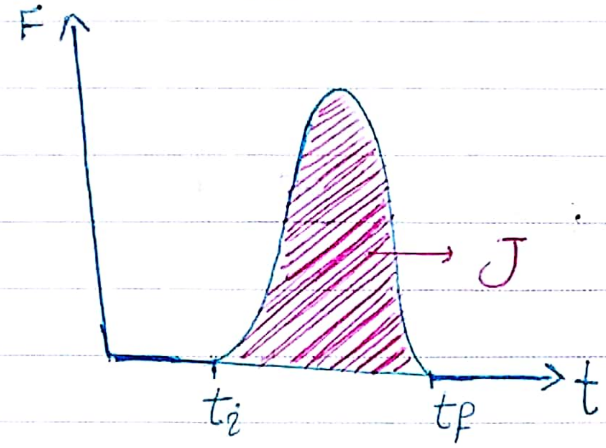
فرض — در $t=6s$ جسم منفجر شود — ذرات آن به اطراف می روند اما همچنان حرکت سهمی وار است. ✓ cm مرکز جرم

اگر نیروی داخلی مثل انفجار داشته باشیم نیروی خارجی جدیدی پیش می آید.

PAPCO

Subject:
Date

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{P}}{dt}$$



$$d\vec{P} = \vec{F}(t)\,dt$$

$$\Delta t = t_f - t_i$$

$$\int_i^f d\vec{P} = \int_{i=t_i}^{f=t_f} \vec{F}(t)\,dt$$

$$\Delta P = \int_{t_i}^{t_f} F(t)\,dt = \vec{J}$$

مثالی برای ضربه:

توپ بیسبال و چوب بیسبال

اندازه حرکت و انرژی جنبشی در برخوردها ← در برخورد هیچ نیروی خارجی نداریم و نیروی حاصل از برخورد اجسام مهم است.

اما انرژی جنبشی ممکن است تلف شود و ثابت نماند (لزوماً) یعنی اندازه حرکت (نیرو) در لحظه قبل و بعد از ← $(\vec{F}_{ext} = 0)$ برخورد

برخورد برابر است.

$$P_{inite} = P_{final} = Const$$

اصل پایستگی تکانه خطی و پایستگی انرژی کل:

$$E_T = E_{mec} + E_{other}$$

(E_{other}: انرژی سایر نیروها)

$$E_{other} = E_{th} + E_{inite} = 0 \longrightarrow E = E_{mec} = k$$

(E_{th}: گرمایی ؛ E_{inite}: انرژی اولیه سیستم)

PAPCO

$$K_{inites} = K_{final}$$ برخورد کشسان

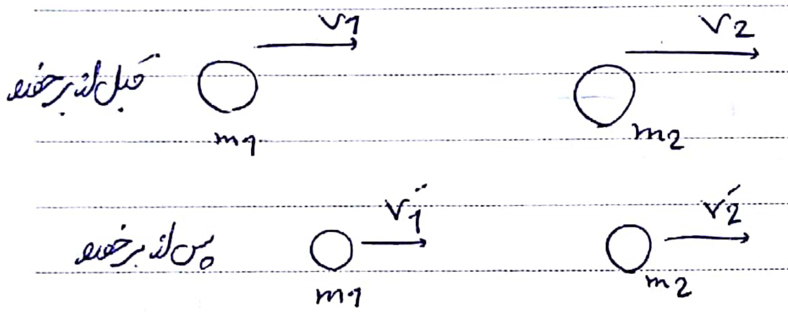
Scanned by CamScanner

25/10

Subject:
Date:

$E_{th} \neq 0$ $\quad K_{ini} \neq K_{final}$ برخورد غیرکشسان

نکته ← زمانی غیرکشسان کامل (E_{th} ماکسیمم (Max) شود) ← زمانیکه دو جسم کامل به هم بچسبند



$$\vec{P}_{initial} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$\vec{P}$ ثابت

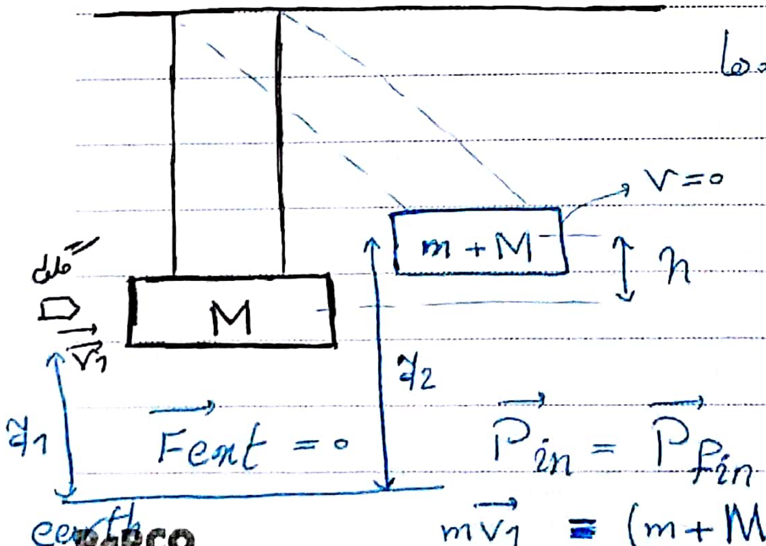
$$\vec{P}_{final} = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

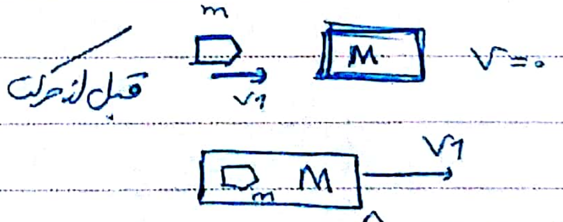
if $\Rightarrow$ $v_1' = v_2' = v'$ → زمانیکه دو جسم به هم بچسبند

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = (m_1+m_2)\vec{v'}$$

مثال

داده‌ها $\left\{ h,\ m \text{ و } M \right.$ $\quad v_1 = ?$ خواسته مسئله





$\vec{v_1} = v_1\hat{i}$ $\quad \vec{v'} = v'\hat{i}$

$$\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin}$$

$$m\vec{v_1} = (m+M)\vec{v'} \longrightarrow mv_1 = (m+M)v'$$

Scanned by CamScanner

initial

$E_1 = E_2 \qquad E_{mec\,1} = \frac{1}{2}(m+M)v'^2 + (m+M)g y_1$

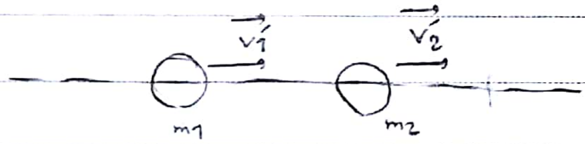
$= (m+M)g y_2 + 0 = E_{mec\,2}$ ⟶

($y_2 = h + y_1$) ↳ final

$v' = \sqrt{2gh} \qquad v_1' = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$

برخورد کشسان یک بعدی:

$k_i = k_f$



$\vec{P_i} = \vec{P_F} \qquad \vec{P_i} = (m_1 v_1 + m_2 v_2)\hat{i}$

$\vec{P_F} = (m_1 v_1' + m_2 v_2')\hat{i}$

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$ (1) $\qquad m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$ (2)

$K_i = K_f$

$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \longrightarrow m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$

$m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \longrightarrow v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$ (3)

From eq (2) and (3) ; 2 ⟶ $v_1 - v_1' = \frac{m_2}{m_1}(v_2' - v_2)$ (4)

$\xrightarrow{3+4} \quad 2v_1 = v_2\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1}\right) + v_2'\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)$

P4PCO

Scanned by CamScanner

26/۱۲

Year. Month. Day. ( ) Subject:

$$2v_1\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_2+v_2' \qquad v_2'=\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_1-\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)v_2$$

from eq 2 $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ $v_2'-v_2=\frac{m_1}{m_2}(v_1-v_1')$

$$\rightarrow 2v_2=v_1\left(\frac{m_2-m_1}{m_2}\right)+v_1'\left(\frac{m_2+m_1}{m_2}\right) \Rightarrow v_1'=\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2+\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1$$

فرض $v_2=0 \longrightarrow v_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1$ if $v_1=0$ $v_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1$

جرم 2 ساکن $\longrightarrow$ یک مثال حالت خاص

- if $m_1>m_2 \Rightarrow 0<v_1'<v_1$ و $v_2'>0$

- if $m_1\gg m_2$ (خیلی بزرگتر) $\xrightarrow[\text{در مقابل } m_1]{\text{صرف نظر از جرم } m_2}$ $v_1'=v_1$ و $v_2'=2v_2$

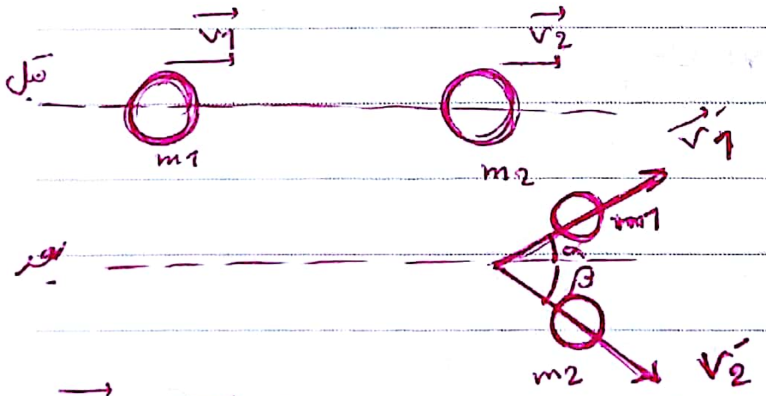
if $m_1<m_2 \Rightarrow v_1'<0$ و $v_2'>0$

if $m_1\ll m_2 \Rightarrow v_1'=-v_1$, $v_2'=0$

با کل انرژی جنبشی اولیه اش باز می گردد

if $m_1=m_2$ $v_1'=0$ $v_2'=v_1$

برخوردهای دو بعدی :



$$\vec{P_i}=\vec{P_F}$$

$$(P_{x_1}\hat{i}+P_{y_1}\hat{j})+(P_{x_2}\hat{i}+P_{y_2}\hat{j})=(P_{x_1}'\hat{i}+P_{y_1}'\hat{j})+(P_{x_2}'\hat{i}+P_{y_2}'\hat{j})$$

AVANG Notebook

Scanned by CamScanner

$$(P_{x_1} + P_{x_2})\hat{i} + (P_{y_1} + P_{y_2})\hat{j} = (P'_{x_1} + P'_{x_2})\hat{i} + (P'_{y_1} + P'_{y_2})\hat{j}$$

$x: \quad P_{x_1} + P_{x_2} = P'_{x_1} + P'_{x_2}$

$y: \quad P_{y_1} + P_{y_2} = P'_{y_1} + P'_{y_2}$

قبلاً $\Rightarrow \quad P_{y_1} = P_{y_2} = 0 \qquad \vec{P} = m\vec{v} \qquad v_y = 0 \rightarrow P_y = 0$

$P_1 + P_2 = P'_{x_1} + P'_{x_2}$ (1)

$0 = P'_{y_1} + P'_{y_2}$ (2)

$P_1 = m_1 v_1$

$P_2 = m_2 v_2$

$$\begin{cases} P'_{x_1} = P'_1 \cos\alpha = m_1 v'_1 \cos\alpha \\ P'_{x_2} = P'_2 \cos\beta = m_2 v'_2 \cos\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} P'_{y_1} = P'_1 \sin\alpha \\ P'_{y_2} = P'_2 \sin\beta \end{cases}$$

(1) $\quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 \cos\alpha + m_2 v'_2 \cos\beta$ (5)

(2) $\quad m_1 v'_1 \sin\alpha = - m_2 v'_2 \sin\beta$ (6)

AVANG Notebook

Scanned by CamScanner

27/۱۷

Year. Month. Day. ( ) Subject:

تمرین *

if $k_i = k_f$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

مثال 2-8 ، تمرین سری 8

$v_2 = 0$ $(\alpha_{max} = ?)$

جهت x $\Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos\alpha + m_2 v_2' \cos\beta$ (1)

$6 \longrightarrow m_1 v_1' \sin\alpha = - m_2 v_2' \sin\beta$ (2)

پایستگی K $m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$ (3)

$1 \longrightarrow m_1 (v_1 - v_1' \cos\alpha) = m_2 v_2' \cos\beta$

$2 \longrightarrow$ خودش (3) $\longrightarrow m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 v_2'^2$ (3)

۳ معادله ۳ مجهول است یک طوری از β خلاص شید خواسته مسئله α_{max}

(1) $\longrightarrow$ به توان 2 $\longrightarrow m_1^2 (v_1 - v_1' \cos\alpha)^2 = (m_2 v_2')^2 \cos^2\beta$ (1)'

(2) $\longrightarrow$ 〃 〃 〃 $\longrightarrow (m_1 v_1')^2 \sin^2\alpha = (m_2 v_2')^2 \sin^2\beta$ (2)'

$+ 1', 2' \longrightarrow m_1^2 (v_1 - v_1' \cos\alpha)^2 + (m_1 v_1')^2 \sin^2\alpha = (m_2 v_2')^2$ (4)

$(4) \longrightarrow m_1^2 v_1^2 + m_1^2 v_1'^2 \cos^2\alpha - 2 m_1^2 v_1 v_1' \cos\alpha +$
$(m_1 v_1')^2 \sin^2\alpha = (m_2 v_2')^2$

$\Rightarrow m_1^2 v_1^2 + m_1^2 v_1'^2 - 2 m_1 v_1 v_1' \cos\alpha = (m_2^2 v_2'^2)$ 4'

AVANG Notebook

Scanned by CamScanner

Year. Month. Day. ( ) Subject:

$m_2^2 v_2'^2 = m_2 m_1 (v_1^2 - v_1'^2)$ $\xrightarrow{\text{جایگذاری در 4}}$

$m_1^2 v_1^2 + m_1^2 v_1'^2 - 2m_1^2 v_1 \cos\alpha \, v_1' = m_1 m_2 (v_1^2 - v_1'^2)$

$v_1'^2 \underbrace{(m_1 + m_2)}_{a} - \underbrace{(2m_1 v_1 \cos\alpha)}_{b} v_1' + \underbrace{(m_1 - m_2) v_1^2}_{c} = 0$

جواب داشته باشیم $\Delta \geq 0 \longrightarrow b^2 - 4ac \geq 0 \longrightarrow$

$4(m_1 v_1)^2 \cos^2\alpha - 4(m_1 + m_2)(m_1 - m_2) v_1^2 \geq 0$

$m_1^2 \cos^2\alpha - (m_1^2 - m_2^2) \geq 0$ $m_1^2(\cos^2\alpha - 1) + m_2^2 \geq 0$

$-m_1^2 \sin^2\alpha + m_2^2 \geq 0 \longrightarrow m_2^2 \geq m_1^2 \sin^2\alpha$

$|\sin^2\alpha| \leq \left|\frac{m_2}{m_1}\right|^2$ $|\sin\alpha| \leq \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow$

$-\frac{m_2}{m_1} \leq \sin\alpha \leq \frac{m_2}{m_1}$ $\max(\sin\alpha) = \frac{m_2}{m_1}$

$\sin\alpha_{max} = \frac{m_2}{m_1}$ $\alpha_{max} = \sin^{-1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$

Scanned by CamScanner

28/۲۸

Subject:
Date

(مباحث ترم) فیزیک 1 استاد یاسر توکلی

1. حرکت دورانی
- مکان های زاویه ای
- جابجایی زاویه ای

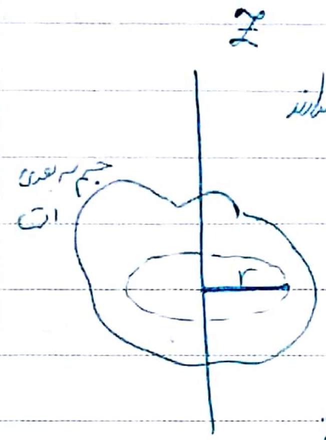
2. سرعت زاویه ای

3. حرکت با شتاب ثابت زاویه ای

4. شتاب زاویه ای

5. روابط بین حرکت خطی و زاویه ای

چرخش :



$r = Const$ هر ذره ثابت است زیرا هر ذره در راستای شعاع ذرات ندارد

سرعت شعاعی — سرعت مماسی

$$\vec{V} = \vec{V}_r \hat{r}_\circ + \vec{V}_\theta \hat{\theta}_\circ = (\dot{r})\hat{r}_\circ + (r\dot{\theta})\hat{\theta}_\circ$$

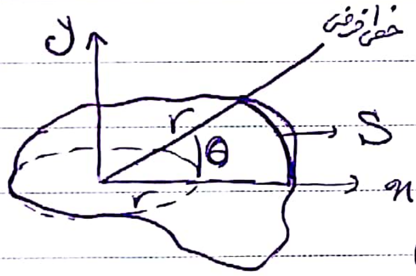
شتاب مرکزگرا — شتاب مماسی

$$\vec{a} = \vec{a}_r \hat{r}_\circ + \vec{a}_\theta \hat{\theta}_\circ = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) r_\circ + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}_\circ$$

$$\xrightarrow{r = Const} \quad \vec{V} = r\dot{\theta}\hat{\theta}_\circ = V_\theta \hat{\theta}$$: حرکت روی دایره $|\vec{V}| = v = V_\theta$

سرعت مماسی

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2 \hat{r}_\circ + r\ddot{\theta}\hat{\theta}_\circ = a_r \hat{r}_\circ + a_\theta \hat{\theta}_\circ$$



$\theta r = S$ — شعاع (فاصله ی عمودی نسبت به مبدأ چرخش)

$\theta = \dfrac{S}{r}$ (Rad)

$1 Rad = 360° = 2\pi$ (Rad) $\qquad 1 Rad = \dfrac{1 Rev}{2\pi} = 0.16\ Rev =$

Revelotion — یک چرخش کامل

$\dfrac{360°}{2\pi} = 57°$ $\qquad S = 2\pi r$

$$\begin{cases} \theta(t_1) = \theta_1 \\ \theta(t_2) = \theta_2 \end{cases} \rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 \qquad \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$ (جابجایی زاویه ای)

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ خاصیت جابجایی بردار ← اگر کمیتی از این پیروی نکند بردار نیست

برای جابجایی زاویه ای چک می کنیم که بردار است یا نه ← مثال ماژیک و تخته پاک کن استاد ← نتیجه شد (بردار نیست.)

$\omega_{avg}=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}\left(\dfrac{Rad}{s}\right)$ $\dot{\theta}\equiv\omega(t)=\dfrac{d\theta}{dt}$ سرعت زاویه ای لحظه ای

$\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}\left(Rad/s^2\right)$
→ شتاب زاویه ای

پارامترهای زاویه ای $(\alpha ، \omega ، \theta)$ پارامترهای خطی $(a ، S ، r)$

$\theta=\dfrac{S}{r}\longrightarrow S=r\theta$ $\dfrac{ds}{dt}=V_\theta$ (سرعت مماسی) $=\dfrac{d}{dt}(r\theta)=\underset{\text{ثابت}}{(r)}\dfrac{d\theta}{dt}=$

$r\dot{\theta}=r\omega$
→ سرعت زاویه ای

$\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{V_\theta}{r}\right)$! $a_\theta=\dfrac{d^2S}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}(r\omega)=r\dfrac{d\omega}{dt}$

$=r\dfrac{d}{dt}\dot{\theta}=r\ddot{\theta}=a_\theta$

if $\dot{\theta}=\omega=Const$ $\ddot{\theta}=0\Rightarrow a_\theta=r\ddot{\theta}=0$ ⟶ حرکت دایره ای یکنواخت

$a_r=-r\dot{\theta}^2=-r\omega^2$ $a_r=-r\left(\dfrac{v}{r}\right)^2=-\dfrac{v^2}{r}$

PAPCO $v\neq0\longrightarrow\dot{\theta}\neq0$

29/۲۹

Subject:
Date

(۱) ثابت باشد (۲) متغیر باشد (برحسب t)

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ $\int d\omega = \int \alpha \, dt$ $\rightarrow$ if $\alpha = \text{const} \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha \int_{t_0}^{t} dt$

$\rightarrow \omega - \omega_0 = \alpha (t - t_0) \xrightarrow{t_0 = 0} \begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ v = v_0 + at \end{cases}$ خطی

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$, $v = \frac{dx}{dt}$ $\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega \, dt \rightarrow \theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} (\omega_0 + \alpha t) dt$

$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \rightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$

$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$

$\theta - \theta_0 = \omega_0 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2 \rightarrow$

$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2\alpha}\left[(\omega - \omega_0)^2 + 2\omega_0(\omega - \omega_0)\right]$

$\omega^2 - 2\omega\omega_0 + \omega_0^2$ $2\omega_0\omega - 2\omega_0^2$

$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2\alpha}(\omega^2 - \omega_0^2)$ $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\left(\frac{\theta - \theta_0}{\Delta t}\right)$

حرکت: $x = vt$ $S = v_\theta t \rightarrow t = T \rightarrow 2\pi r = v_\theta T$

$v_\theta = r\omega = r\dot{\theta}$ $2\pi r = r\omega T$ $T = \frac{1}{f}$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

PAPCO $\rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

Scanned by CamScanner

مسئله ۲

$\alpha = 5t^3 - 4t \qquad t(s) \qquad \alpha = (rad/s^2)$

$t = 0 \Rightarrow \omega_0 = 5\, rad/s \qquad \theta_0 = 2\, rad$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ ؛ چون α متغیر است

$d\omega = \alpha\, dt \qquad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t (5t^3 - 4t)\,dt \Rightarrow \omega - \omega_0 = \frac{5}{4}t^4 - 2t^2 \Big]_0^t$

($\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \omega - \omega_0$)

$= \frac{5}{4}t^4 - 2t^2 \qquad \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega\, dt \Rightarrow \theta - \theta_0 = \int_0^t (\frac{5}{4}t^4 - 2t^2)\,dt =$

$\frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 \longrightarrow \theta = \theta_0 + \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3$

1. انرژی جنبشی دورانی

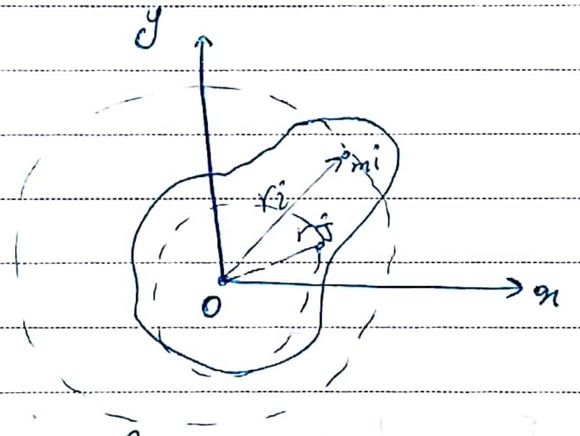
گشتاور ماند

قضیه محورهای موازی

2. گشتاور نیرو

3. قانون دوم نیوتن برای دوران

4. کار و انرژی جنبشی



$\vec{v} = \dot{r}\hat{r}_0 + r\omega\hat{\theta}_0$

$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}_0$

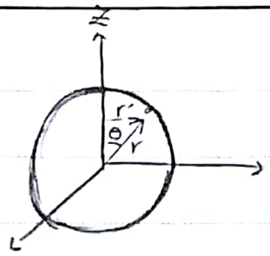
$\vec{v} = v_\theta\hat{\theta}_0 = r\omega\hat{\theta}_0 \qquad \omega_i = \omega_j = 0 \Rightarrow \omega = Const$

$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i (r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2}_{I}\Big)\omega^2$

$= \frac{1}{2}I\omega^2 \longrightarrow$ گشتاور ماند $I = \sum m_i r_i^2$

30/۳۰

Subject:
Date



$r' = r\sin\theta$

$$I = \int r'^2 dm = \int r^2 \sin^2\theta \, \rho r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr \, d\varphi$$

$$= \rho \int r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \int d\varphi \qquad I = \frac{2}{5} MR^2$$

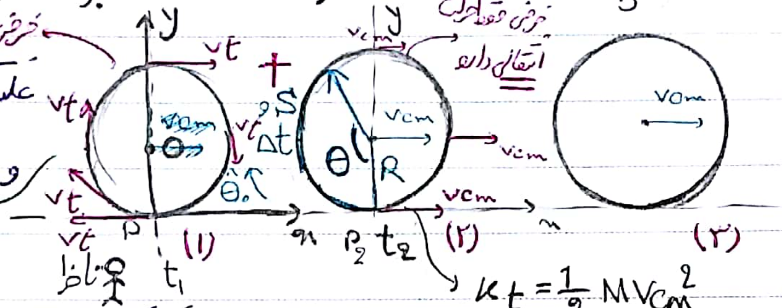
1. غلتش به عنوان ترکیبی از انتقال و دوران

2. انرژی جنبشی جسم غلتان ① $K_r = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$

3. گشتاور + اصطکاک و غلتش + مثال ها

4. اندازه حرکت زاویه ای

5. قانون دوم نیوتن برای حرکت زاویه ای



$K_t = \frac{1}{2} M V_{cm}^2$ $\qquad v_t = v_{cm}$

Δx و $\Delta t = t_2 - t_1$ $\qquad$ (۱) + (۲) = (۳)

$\Delta t : \Delta x = S = R\theta$

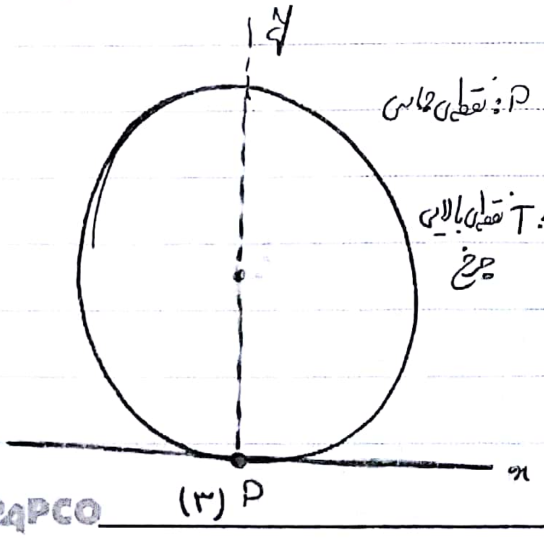
حرکت انتقالی : $\Delta t : \Delta x \longrightarrow v_{cm} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

" دورانی : $\Delta t : S$

$\vec{V}$ دوران $= \cancel{\vec{v_r}\hat{r_0}} + \vec{v_t}\hat{\theta_0} \Longrightarrow v_t = \frac{ds}{dt} \qquad v_t = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\theta) =$

$R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$

غلتش : حرکت دورانی خالص + حرکت انتقالی خالص



P : نقطه تماس $\Rightarrow \vec{V_P} = \vec{V_{cm}} + \vec{V_t} = 0$ برابرند و در جهت مخالف

T : نقطه بالای چرخ $\quad \vec{V_T} = \vec{V_{cm}} + \vec{V_T} = 2v_{cm} = \longrightarrow$ برابرند و در جهت هم

$2R\omega\,\hat{i}$

شکل چرخ خندهکه قسمت بالای اش تیره های

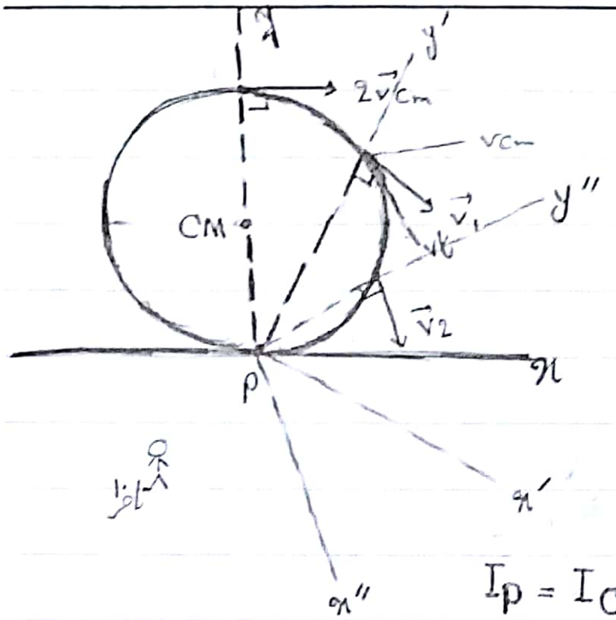
$CM : v_{CM} = R\omega\,\hat{i}$ $\qquad$ چرخ - تار و غیر واضح است اما قسمت

تماس اش با سطح واضح قابل رؤیت است.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date



$K_{\text{حالت } 3} = K_{\text{حالت } 1} + K_{\text{حالت } 2}$

چرخش ما حول P

$K = \frac{1}{2} I_p \omega^2$

I_p ← گشتاور ماند حول نقطه ی P

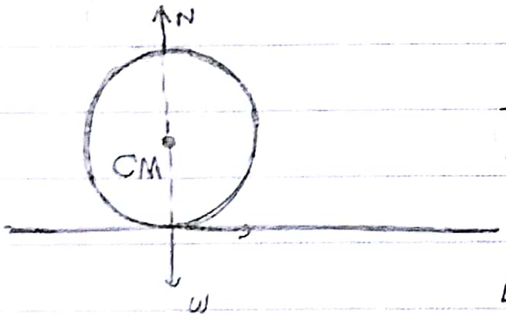
$$I_p = I_{CM} + MR^2$$

$$K = \frac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)\omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} MR^2\omega^2$$

$\frac{1}{2} I_{CM}\omega^2$: انرژی جنبشی دورانی — $\frac{1}{2} MR^2\omega^2$ ($R^2\omega^2 = v_{cm}^2$): انرژی جنبشی انتقالی

اصل غلتش این است که جابجایی طی شده روی زمین توسط جسم برابر با میزان طی کردن θ و محیط لذا دایره که می پیماید باشد.

جسم نلغزد



اگر $R\omega$ تغییر کند، Δx و به تبع آن S (با نسبت ثابت) تغییر می کنند.

$$\vec{F} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm}$$

$$\Delta x = S = R\theta \Longrightarrow v_{cm} = R\omega \longrightarrow a_{cm} = R\frac{d\omega}{dt} =$$

اگر v_{cm} تغییر کند پس ω متغیر است

$R\alpha$ → باید گشتاور داشته باشیم و نیروی f_s موجب این گشتاور است

$\tau = I_{CM}\alpha = f_s R$ جسم نباید بلغزد → پس باید حتما f_s داشته باشیم

جدا شده از سطح و نیروی اصطکاک ایستایی بزرگتر باشد از نیروهایی که خواهان جدا کردن چرخ از زمین هستند.

PAPCO

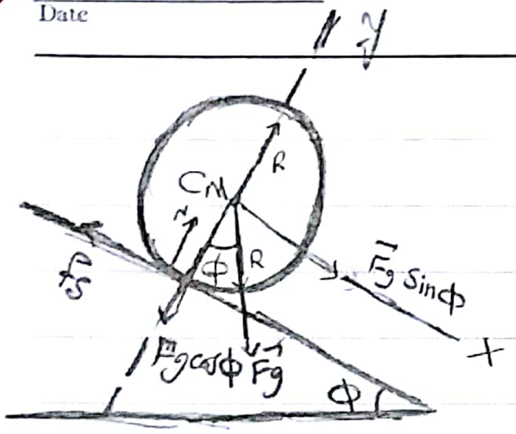
Scanned by CamScanner

37/۳۱

Subject
Date

(fk زمانی داریم که لغزش داشته باشیم.)

غلتش خالص روی یک سطح شیبدار:



انتقال
$$\begin{cases} x: \sum F_x = ma_x \\ y: \sum F_y = ma_y = 0 \end{cases}$$
$a_y \to a_{CM}$

$y \to N = mg\cos\phi$

$x: \; mg\sin\phi - f_s = m a_x \longrightarrow a_{CM}$ (1)

دوران: نیروهایی که در جهت R هستند اثری بر دوران ندارند → f_s مؤثر است: $\tau_s = f_s R = I_{CM}\alpha \longrightarrow \alpha = \frac{a_x}{R}$

$$f_s = \frac{I_{CM}\alpha}{R} \xrightarrow{1, 2} mg\sin\phi - \frac{I_{CM} a_x}{R^2} = m a_x$$

$$f_s = \frac{I_{CM} a_x}{R^2} \quad (2)$$

$$g\sin\phi - \frac{I_{CM} a_x}{mR^2} = a_x \quad g\sin\phi = a_x\left(1 + \frac{I_{CM}}{mR^2}\right)$$

$$a_x = \frac{g\sin\phi}{1 + \frac{I_{CM}}{mR^2}}$$

اگر جسم مکعب یا ... (غیر از کره) باشد دوران نداشته و فقط لغزش به پایین داریم

$a_x = g\sin\phi - \mu_k g\cos\phi$

$\phi \uparrow \Rightarrow f_s \uparrow \quad \phi_{max} \to f_{s\,max} = \mu_s N$

اگر زاویه زیاد شود باید f_s نیز زیاد شود تا جسم ساکن بماند

جسم لغزنده است → $\mu_s \geq tg\phi$

$$\mu_s \cdot N \geq \frac{I_{CM}}{R^2}\left[\frac{g\sin\phi}{1 + \frac{I_{CM}}{mR^2}}\right] \longrightarrow \mu_s \cdot mg\cos\phi \geq \frac{1}{m} \cdot \frac{I_{CM}/mR^2}{1 + \frac{I_{CM}}{mR^2}}$$

$N \to mg\cos\phi$

$$\frac{g\sin\phi}{\cos\phi} = tg\phi \longrightarrow \mu_s \geq \frac{I_{CM}/mR^2}{1 + \frac{I_{CM}}{mR^2}} tg\phi$$

ϕ کاهش یافته که

آمده بدست است

$$\beta = \frac{I_{CM}}{mR^2 + I_{CM}} \Rightarrow$$

شرط لغزش خالص

PAPCO

Scanned by CamScanner

$\mu_s \geq \beta \tan\phi \qquad 0 < \beta < 1$

به نام خدا

1. اندازه ی حرکت زاویه ای

2. قانون دوم نیوتن برای چرخش

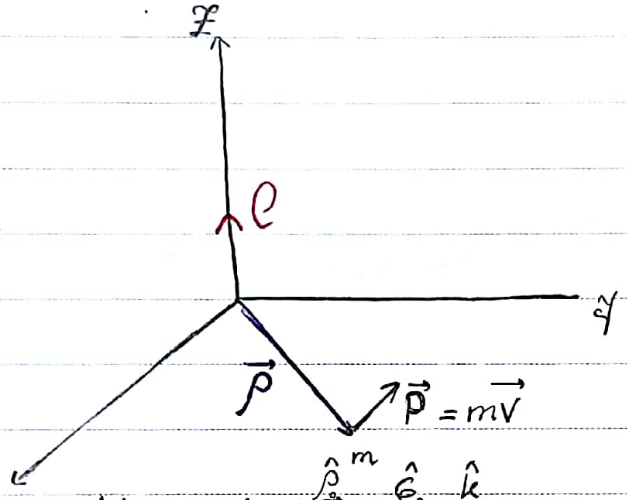
3. سامانه ای از ذرات

4. اندازه حرکت زاویه ای جسم صلب

5. پایستگی اندازه حرکت زاویه ای

$\vec{P} = m\vec{v}$

تکانه زاویه ای $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{P}$ ⟶ قاعده ی انگشت شست



مختصات استوانه ای $(\vec{\rho}, \varphi, z)$ ($\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{k}$)

قطبی $z = : (\vec{\rho}, \varphi)$

$\vec{\rho} = \rho\hat{\rho} \qquad \vec{r} = \vec{\rho} \qquad \vec{F}_{net} = \frac{d\vec{P}}{dt} \longrightarrow \vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$

$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{P}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{P} + \vec{r}\times\frac{d\vec{P}}{dt} = \cancel{\vec{v}\times\vec{P}}^{\,0} + \vec{r}\times\vec{F}_{net}$

(موازی)

$= \vec{\tau}_{net}$

$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \dots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i \qquad \vec{\tau}_{net,i} = \frac{d\vec{\ell}_i}{dt}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

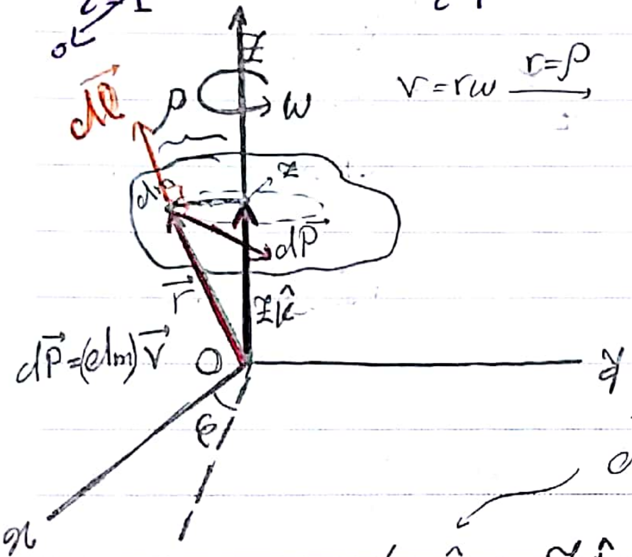
32/۳۲

Subject:
Date

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum \vec{l}_i = \sum \frac{d\vec{l}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{net,i} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{int,i} + \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{ext,i} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

(the internal-torque sum is crossed out and marked 0)



$v = r\omega \xrightarrow{r=\rho} v = \rho\omega$

$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$

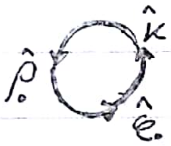
$L = ? = \int d\vec{l}$

$\vec{dP} = dP\,\hat{e}_\varphi$ (اندازه، زاویه)

$\vec{dl} = \vec{r} \times d\vec{P}$

$$= (\rho\hat{\rho} + z\hat{k}) \times dP\,\hat{e}_\varphi = \rho\, dP(\hat{\rho} \times \hat{e}_\varphi) + z\,dP(\hat{k} \times \hat{e}_\varphi)$$

($\hat{\rho} \times \hat{e}_\varphi = \hat{k}$, $\hat{k} \times \hat{e}_\varphi = -\hat{\rho}$)



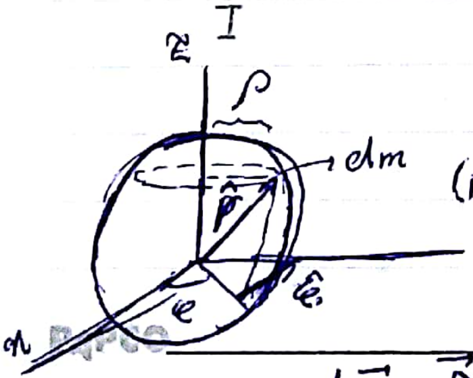
$l = \int \rho\, dP\,\hat{k} - \int z\, dP\,\hat{\rho}$ (second term crossed out) ← برآیند در راستای ρ باید صفر باشد

$l = \int \rho\, dP\,\hat{k} = L_z \hat{k}$ از شکل هم پیداست!

$L_x = L_y = 0$ $L_z = \int \rho\, dP = \int \rho\,(dm)v = \int \rho\, dm\,(\rho\omega) =$

$\omega \int \rho^2 dm = \omega I_z \longrightarrow L_z = \omega I_z$ (where $\int \rho^2 dm = I$)

$P = mv \to \omega$, $m \to I_z$



(r, θ, φ) $I_z = \frac{2}{5} mR^2$ $\rho = r\sin\theta$

$I_z = \int \rho^2 dm = \int (r\sin\theta)^2 dm$

$dm = \rho\, dv = \rho\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

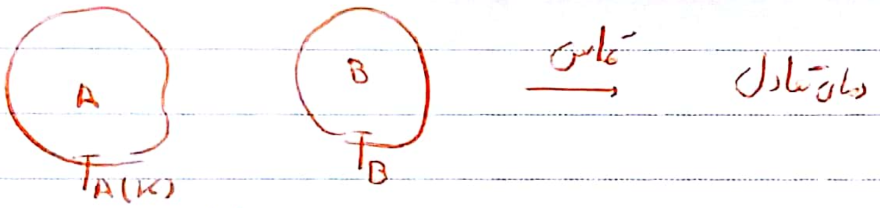
$\vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ $\quad \vec{L} = Const$ $\quad t_i \to L(t_i) = \vec{L}_i$

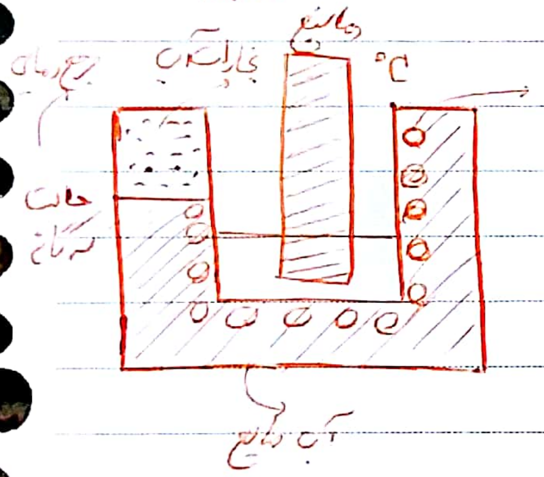
$t_f \to L(t_f) = \vec{L}_f$ $\quad \vec{L}_i = \vec{L}_f$ $\quad I_i w_i = I_f w_f = Const$

if $I_f < I_i \to w_f > w_i$

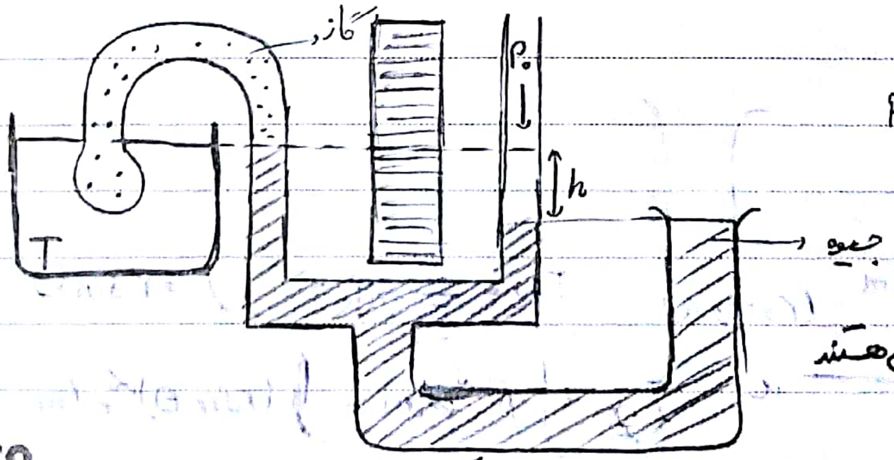
دما: گرمای ترمودینامیک

1. دما (K)





دمای سه‌گانه $T_3 = 273.16\ K$



$P = P_0 - \rho g h$

چگالی جیوه — اختلاف ارتفاع — سطوح جیوه

سطح جیوه در تعادل هستند

دماسنج گازی با حجم ثابت

33/۳۳

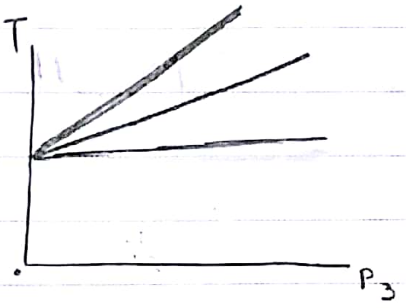
Subject:
Date

$T = CP$ در نقطه سه گانه: $T_3 = CP_3 \Rightarrow C = \frac{T_3}{P_3}$

$T = \frac{T_3}{P_3} P = 273.16\,K \cdot \frac{P}{P_3}$

P_3 برای گازهای مختلف متفاوت است

اگر P_3 به صفر میل کند یعنی مقدار گاز در تعادل با حجم بسیار اندک باشد دماها دقیق تر می شود ← گاز ایده آل



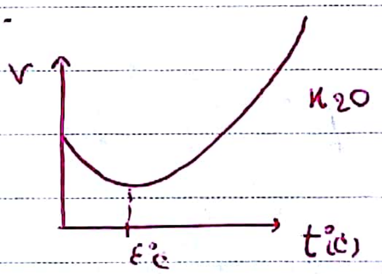
$T = T_C + 273.16°$

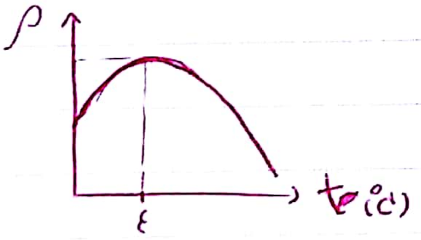
$T_F = \frac{9}{5} T_C + 32°$ ($°F$)

$T'_F - T_F = \Delta T_F = \frac{9}{5}(T'_C - T_C)$ $\quad \Delta T_F = \frac{9}{5}\Delta T_C$

آب $0°C$ $4°C$ $5°C$ ----

$\rho\uparrow$ ← → ρ_{max} ← → $\rho\downarrow$





بجز آب همه اجسام با افزایش دما منبسط می شوند

انبساط طولی:

$\Delta L = L\alpha\Delta T$

α ضریب انبساط طولی $\quad$ unit → $\frac{1}{K}$

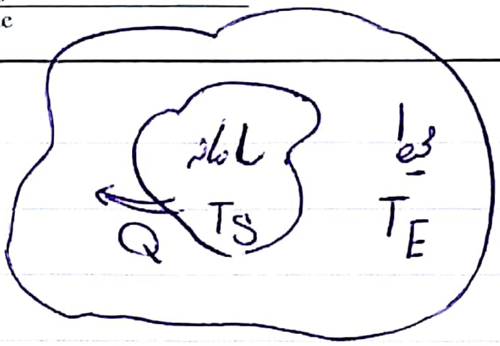
انبساط حجمی $\Delta V = L\beta\Delta T$

ضریب انبساط حجمی $\beta = 3\alpha$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date:



if $T_S > T_E$ ⟶ انتقال انرژی از سامانه به محیط به صورت انرژی گرمایی (J)

یا گاهی Cal

$1\ Cal = 4.18\ J$

$T_S < T_E$ ⟵ $Q > 0$ (+) سامانه گرما گیرد

سامانه گرما داده $Q < 0$ (−)

اگر سامانه کار انجام دهد، کار سامانه مثبت است و اگر کار روی سامانه انجام گیرد، کار سامانه منفی است.

ظرفیت گرمایی $C = \frac{Q}{\Delta t}$ (J/K)

$C = mc$
ظرفیت گرمایی ویژه

$Q = mc\Delta t$ $(J/kg.K)$

گاز — مایع — جامد — $Q = mL$

L_f : تغییر حالت از جامد به مایع — $-L_f$: تغییر حالت از مایع به جامد

L_v : تغییر حالت از مایع به گاز — $-L_v$: " " از گاز به مایع

34/۲۲

Subject:
Date

به نام یار

ادامه‌ی مبحث ترمودینامیک

1. قانون اول ترمودینامیک
- فرآیند بی دررو
- فرآیند حجم ثابت
- چرخه‌ای
- انبساط آزاد

2. انتقال گرما
- رسانش
- همرفت
- تابش

3. تعریف جبری کارها

W و Q به مسیر انتخابی بستگی دارند اما ΔU بستگی ندارد.

مسیر مختلف = مساحت زیر نمودار P-V مختلف پس کار متفاوت

$$E_{in} = Q - W$$

↳ کار سیستم

$$dE_{in} = dQ - dW$$

if $dW > 0 \Rightarrow dE_{in} < 0$ ⟶ انرژی درونی کاهش می‌یابد

(افزایش حجم)

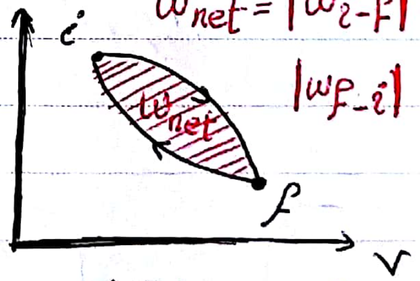
if $dQ > 0 \longrightarrow dE_{in} > 0$ ⟶ گرمای دریافتی دارد به صورت کار روی محیط مصرف می‌شود.

(1) if $dQ = 0 \Rightarrow$ فرآیند بی دررو

(2) if $dW = 0 \Rightarrow$ فرآیند حجم ثابت

(3) if $dE_{in} = 0 \Rightarrow$ فرآیند چرخه‌ای

↳ $dQ - dW = 0 \longrightarrow dQ = dW$



$W_{net} = |W_{i-f}| - |W_{f-i}|$

(ب) W کار سامانه روی محیط است.

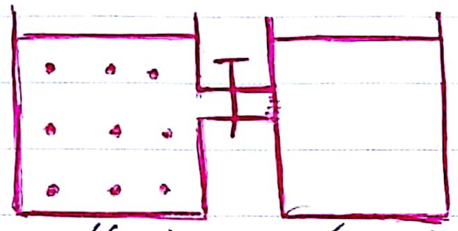
(ن) اگر سامانه مثبت شود یعنی گرما گرفته است.

PAPCO

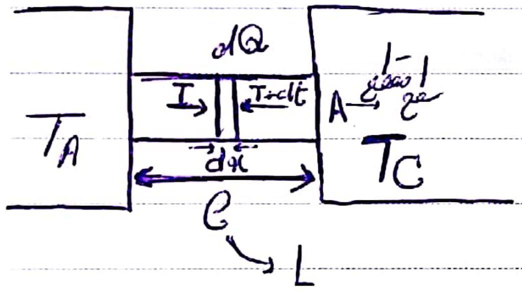
Subject:
Date

انبساط آزاد

سیستم کاملاً ایزوله ← هیچ گرما و کاری بین سامانه و محیط رد و بدل نمی‌شود

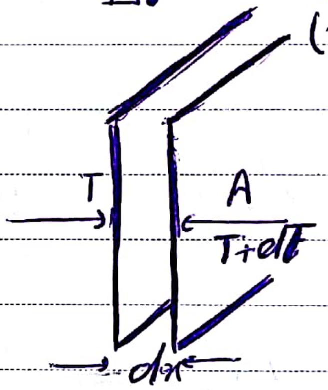


رسانش گرمایی : رسانش : برخورد مولکول ها دائما افزایش گرما به هم و انتقال دادن گرما از نقطه‌ی مبدأ در یک سامانه به نقطه‌ی مقصد در سامانه‌ای دیگر



$$P_{cond} \text{ (توان)} = \frac{dQ}{dt} = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = KA\Delta T$$

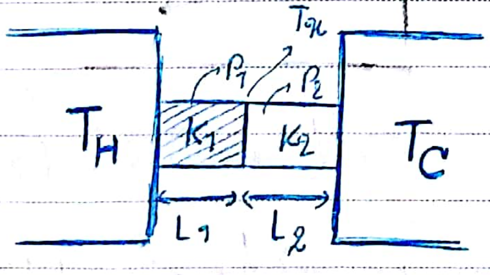
$(T_H - T_C)$



مقاومت گرمایی $R = \frac{L}{K}$

$$P = \frac{dQ}{dt} = KA\frac{dT}{dx}$$

ضریب رسانش ← هرچه K بالاتر جسم رسانش گرمایی بیشتر دارد
(رسانندگی)



$P_1 = P_2$ ← فرض: آهنگ انتقال گرما در دو رسانا ثابت بماند

$$P_1 = K_1 A \frac{\Delta T_1}{e_1}$$

$$P_2 = K_2 A \frac{\Delta T_2}{e_2}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

38/۱۰

Subject:
Date

$$P_1 = \frac{k_1}{e_1} A (T_H - T_x) \qquad P_2 = \frac{k_2}{e_2} A (T_x - T_C)$$

$$P_1 = \frac{A(T_H - T_x)}{R_1} \qquad P_2 = \frac{A(T_x - T_C)}{R_2}$$

$$P = KA\frac{\Delta T}{e} = A\frac{\Delta T}{e/k} = \frac{A\Delta T}{R}$$

$$P_1 = P_2 \longrightarrow \frac{A(T_H - T_x)}{R_1} = \frac{A(T_x - T_C)}{R_2} \Rightarrow$$

$$T_x\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{T_H}{R_1} + \frac{T_C}{R_2} \longrightarrow T_x = \frac{T_H/R_1 + T_C/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{R_2 T_H + R_1 T_C}{R_1 + R_2}$$

$$P_1 = \frac{A}{R_1}\left[T_H - \frac{R_2 T_H + R_1 T_C}{R_1 + R_2}\right] = \frac{A}{R_1}\left[\frac{R_1 T_H + R_2 T_H - R_2 T_H - R_1 T_C}{R_1 + R_2}\right]$$

$$= \frac{A}{R_1}\left[\frac{R_1(T_H - T_C)}{R_1 + R_2}\right] = \frac{A}{R_1 + R_2}(T_H - T_C)$$

$$P_1 = P_2 = P = \frac{A(T_H - T_C)}{R_{eq}}$$

(for 2) $R_{eq} = R_1 + R_2$

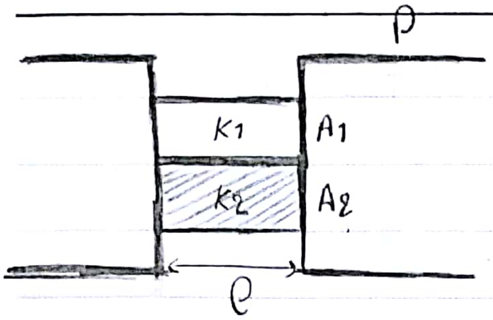
(for n) $R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i$

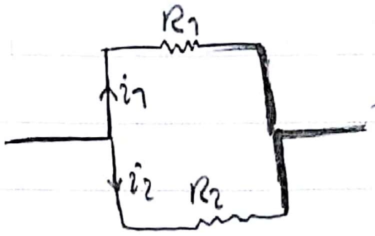
k واحد : $W \cdot m^{-1} \cdot k\,(^\circ C)$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date





$v = v_1 = v_2 = i_1R_1 \neq i_2R_2$

$\frac{v}{R_{eq}} \; (I) = i_1 + i_2 \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

$i_1 + i_2 = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2}$

$$P = P_1 + P_2 = \frac{K_1A_1}{\ell_1}\Delta T + \frac{K_2A_2}{\ell_2}\Delta T \rightarrow P = \left(\frac{K_1A_1 + K_2A_2}{\ell}\right)\Delta T$$

$$= \left(\frac{A_1}{R_1} + \frac{A_2}{R_2}\right)\Delta T = \frac{A}{R}\Delta T$$

$$\text{if } \tilde{R}_i = \frac{\ell_i}{K_iA_i} \rightarrow \left(\frac{1}{\tilde{R}_1} + \frac{1}{\tilde{R}_2}\right)\Delta T = \frac{1}{R_{eq}}\Delta T \rightarrow R_{eq} = \frac{\tilde{R}_1\tilde{R}_2}{\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2}$$

نکته ← سطح مقطع متناسب است با:
- $\frac{1}{\text{مقاومت}}$ ← نسبت عکس
- رسانش ← نسبت مستقیم

همرفت:

تابش:

گرما تابش شده:

$$Q = \sigma \varepsilon A T^4$$

σ: ضریب یا ثابت — ε: گسیلندگی گرمایی

↳ stephen (تجربی) ⟶ Boltzmann | $\sigma = 5.7 \times 10^{-8}\ (J.m^{-2}.k^{-4})$

$0 \leq \varepsilon \leq 1$ { تابش $\varepsilon_{max} = 1$ ⟶ تابش جسم سیاه

↳ Black Body Radiation

PAPCO

CMB → [illegible] تابش های دوبال گیتی است بعد
از انفجار بزرگ

جسم اگر سیاه جسمی مثل کجی باشد تابش نمی کند

$\varepsilon = 1$ جسم سیاه هم برای جذب است و هم برای بازتابش

$Q_{rad} = \sigma \varepsilon A T_{rad}^4$ (دمای جسم)

$Q_{abs} = \sigma \varepsilon A T_{abs}^4$ (دمای محیط)

$Q_{net} = \sigma \varepsilon A (T^4 - T_{abs}^4)$

37 1 ۲۷

Subject:
Date

استاد توکلی فیزیک 1 :

آب گرم کن / سیستم های جوی با پدیده ی همرفت سازگارند

برای رسانش و همرفت به محیط مادی نیاز داریم

تابش با امواج الکترومغناطیسی صورت می‌گیرد که به محیط مادی نیاز ندارند

$T > 0\,K \longrightarrow Q = \sigma \varepsilon A T^4$

دمای کیهان ← 2.7 K

تک بانگ ← 10^{39} K

$0 \leq \varepsilon \leq 1 \longrightarrow$ black body

که کوانتیده

بشر هنوز به 0 K نرسیده است ← دمای که رسیده 10^{-6} K

CMB ← بیان‌گر جسم سیاه است

$Q_{Rad} = -\sigma \varepsilon A T^4$

(11) جهت سازی

$Q_{abs} = \sigma \varepsilon A T_{env}^4$

$Q_{Rad} < 0$

$Q_{net} = Q_{Rad} + Q_{abs} = -\sigma \varepsilon A T^4 + \sigma \varepsilon A T_{env}^4$

$\longrightarrow Q_{neT} = \sigma \varepsilon A (T_{env}^4 - T^4)$

نظریه جنبشی گازها :

که نقطه شروع مکانیک آماری ، ارتباط بین انرژی جنبشی گازها و خاصیت ماکروسکوپیک (P, V, E, T) گازها

بررسی حرکت آماری ذرات سازنده گازها

منظور حجم یک گاز حجم ظرفی است که گاز در آن قرار دارد.

1. 1 mol ?

$1\,mol = 6.02 \times 10^{23}$ atom

2. گاز آرمانی

_ گاز ایده آل = کوتاه

گاز آرمانی

$N_A = 6.02 \times 10^{23} \frac{1}{mol}$

جرم مولی: $M = m N_A$

$n\,mol = n N_A \longrightarrow N$

- Root

ریشه جذر میانگین مربعی ← V_{rms}

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

- انرژی جنبشی میانگین

E n mol of material

$M_{sam} = nM = nmN_A$

به‌دست آمدن تناسب میان n و T و V و P : به طور تجربی

$PV \propto nT$ $\boxed{PV = nRT}$ گاز آرمانی

R ثابت گازها به‌دست آمده به صورت تجربی

$R = 8.314\ J.mol^{-1}.K^{-1}$

ثابت بولتزمن $K = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23}$ → $R = KN_A$

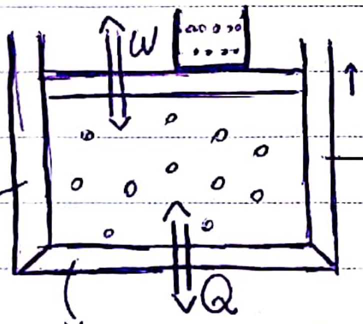
Boltzman

$N = nN_A$ تعداد مولکول‌ها در n مول گاز

$n = \frac{N}{N_A} \rightarrow PV = \frac{N}{N_A} \times KN_A \times T$

$\xrightarrow{*} PV = NKT$

$v_{rms} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$ $K_{avg} = \frac{3}{2}KT$



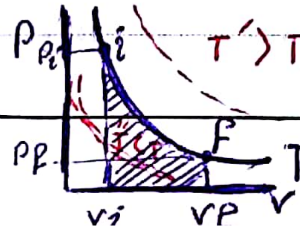
$dw = Pdv$

عایق

حالت اولیه : T_i, V_i, P_i

" ثانویه : T_f, V_f, P_f

if $T = Const \rightarrow PV = Const = \overset{nRT}{C} \rightarrow P = \frac{C}{V}$



$\Delta V > 0 \rightarrow w$ مثبت

$w = \int_{V_i}^{V_f} P dv = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dv}{V} =$

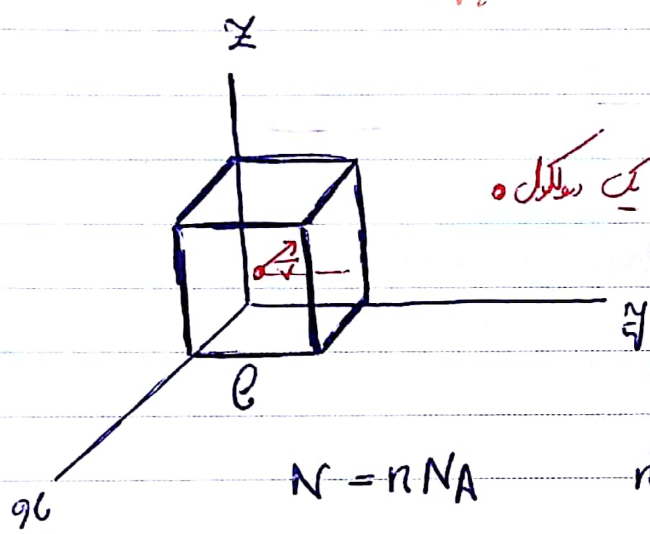
PAPCO

Scanned by CamScanner

$W = nRT \ln V \Big]_{V_i}^{V_f} \longrightarrow W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$ فرآیند همدما $\longrightarrow$ $T = const$

$dW = PdV \longrightarrow dV = 0 \longrightarrow dW = 0 \longrightarrow V = const \longrightarrow$ فرآیند هم حجم

$P = const \qquad W = \int_{V_i}^{V_f} PdV = P\int_{V_i}^{V_f} dV = P\Delta V \qquad \Delta V = V_f - V_i$



یک مولکول

برخورد مولکول به جداره مکعب با ایجاد فشار همراه است

نیروی معادل شده بین مولکول و جداره $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad F_y = \frac{dP_y}{dt}$

$N = nN_A \qquad$ n (mol) of a ideal gas

فرض $\longrightarrow$ هیچ برخوردی بین مولکول‌ها نداریم $\longrightarrow$ هیچ برخوردی

$\vec{V} = \vec{V}_x \hat{i} + \vec{V}_y \hat{j} + \vec{V}_z \hat{k}$

مستقل‌اند

بعد از برخورد جهت حرکت مولکول تغییر می‌کند (منفی می‌شود)

$\Delta P_y = P_{yf} - P_{yi} = -mV_y - mV_y$

$= -2mV_y \longrightarrow F_y = \frac{-2mV_y}{\Delta t}$

$\Delta x = V\Delta t \xrightarrow{\text{رفت و برگشت}} 2l = V_y \Delta t \longrightarrow \Delta t = \frac{2l}{V_y}$

$F_y = \frac{-2mV_y}{\frac{2l}{V_y}} = \frac{-mV_y^2}{l}$

PAPCO

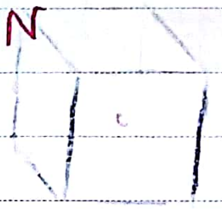
Scanned by CamScanner

Subject:
Date

$$\left|P_{y}\right|_{\text{یک مولکول}} = \frac{|F_y|}{A} = \frac{|F_y|}{\ell^2} = \left|\frac{-m v_y^2}{\ell^3}\right| = \frac{m v_y^2}{\ell^3} \rightarrow$$ فشار ناشی از یک مولکول گاز

$$P_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m v_{y_i}^2}{\ell^3} = \frac{m}{\ell^3} \sum_{i=1}^{N} v_{y_i}^2$$

$$(v_{y_i}^2)_{avg} = \frac{v_{y_1}^2 + v_{y_2}^2 + \dots + v_{y_N}^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (v_{y_i})^2}{N}$$



$$\Rightarrow P = \frac{m}{V} N (v_y^2)_{avg}$$

در حرکت کاملاً تصادفی سه بعدی

$$v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2$$

$$v_{0y}^2 = \frac{1}{3} v_0^2 \qquad (v_y^2)_{avg} = \frac{1}{3} (v^2)_{avg} \longrightarrow$$

$$P = \frac{mN}{3V} (v^2)_{avg} \qquad v_{rms}^2 = (v^2)_{avg} \qquad v_{rms} = \sqrt{(v^2)_{avg}}$$

$$P = \frac{mN}{3V} v_{rms}^2 \rightarrow PV = \frac{mN}{3} v_{rms}^2$$

$$PV = nRT \Rightarrow nRT = \frac{mN}{3} v_{rms}^2 \longrightarrow NKT = \frac{mN}{3} v_{rms}^2$$

$$n = \frac{N}{N_A} \qquad R = KN_A$$

$$v_{rms}^2 = \frac{3KT}{m}$$

P4PCO

$nRT = \frac{mN}{3} v_{rms}^2 \qquad N = nN_A \qquad nRT = \frac{n(mN_A)}{3} v_{rms}^2$

$\longrightarrow RT = \frac{N}{3} v_{rms}^2 \qquad v_{rms}^2 = \frac{3RT}{N} \longrightarrow v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{N}}$

انرژی جنبشی انتقالی مولکولهای گاز ایده آل:

$\frac{1}{2} m v^2 = K_1$

$K = NK_0 \qquad K_{avg} = N(K_{1\,avg}) \qquad K_{1\,avg} = (\frac{1}{2} m v^2)_{avg}$

$K_{1\,avg} = \frac{1}{2} m (v^2)_{avg} \Rightarrow K_{avg} = N \frac{1}{2} m (v^2)_{avg} \longrightarrow$

$= \frac{1}{2} N m (v_{rms})^2 = \frac{1}{2} (N) m \frac{3RT}{M} = \frac{1}{2} n \times 3RT$

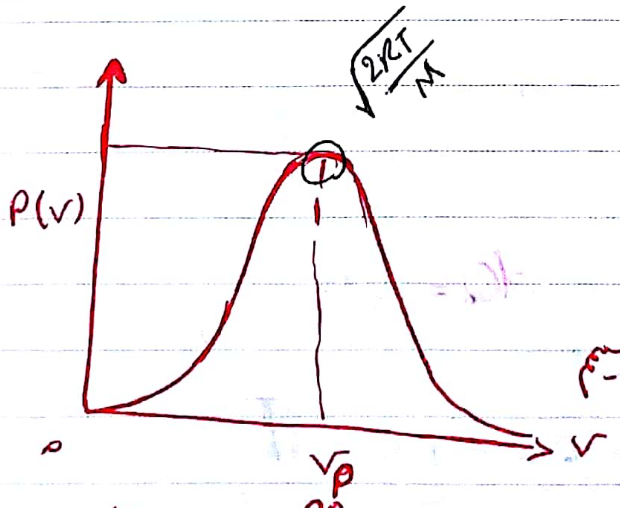
($N \to nN_A$, $M \to mN_A$)

$\longrightarrow K_{avg} = \frac{3}{2} nRT$ ⟶ برای n مول گاز ایده آل

$K_{avg} = \frac{3}{2} NKT$

مثال

توزیع تندی‌ها مولکول‌های گازها



Maxwell

$P(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}$

مقدار ماکسیمم ⟵ $\frac{dP}{dv} = 0$

$P(v_p)$ max

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

$$\frac{dp}{dv} = 1 - \frac{Mv_p^2}{2RT} = 0 \longrightarrow v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \boxed{<} v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{m}}$$

اما تعداد مولکولهایی که تندی v_p را دارند بیشتر از تندی v_{rms} را دارند.
تعداد مولکولهایی است که

مو: $\int_{v_1}^{v_2} P(v)dv$

میانگین: $(v^2)_{avg} = v_{rms}^2$

$$\langle A \rangle = \frac{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots}$$

$$\langle v \rangle = v_{avg} = \int_0^\infty v\,p(v)\,dv =$$

وزن v

$$4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} dv$$

$$v_{avg} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} > v_p$$

$$(v^2)_{avg} = \int_0^\infty v^2 p(v)dv = v_{rms}^2 = \frac{3RT}{M} \longrightarrow \sqrt{(v^2)_{avg}} = v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$\boxed{v_p < (v)_{avg} < v_{rms}}$$

مولکول‌های گاز در حال ارتعاش و حرکت فقط انرژی جنبشی دارند.

ظرفیت گرمایی ویژه مولی گاز

$$Q = mC_m\Delta T \xrightarrow{\text{حال برای گازها}} Q = nC_m \Delta T$$

$$dE_{in} = dQ - dw \qquad K_{avg} = \frac{3}{2}nRT = E_{in} = \frac{3}{2}NKT$$

فقط ایده‌آل است

$$W = \int dw = \int_{v_i}^{v_f} P dv \qquad dQ = nC_n dT$$

$$V \to \text{const} \longrightarrow dQ = nC_v dT \qquad dw = 0$$

$$dE_{in} = dQ = nC_v dT \longrightarrow \frac{3}{2}nR\,dT = nC_v\,dT$$

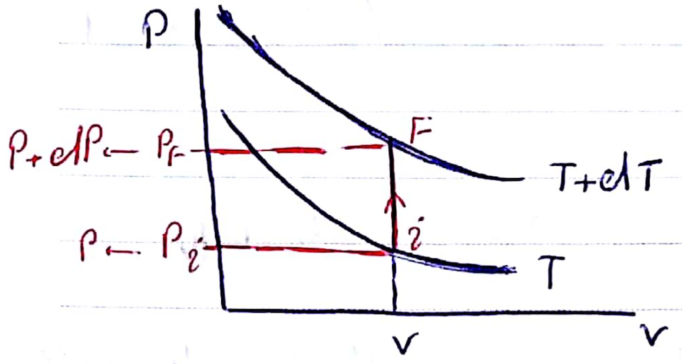
مثال: $C_v = \frac{3}{2}R \longrightarrow C_v = \frac{3}{2} \times 8{,}314\ J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$

PAPCO

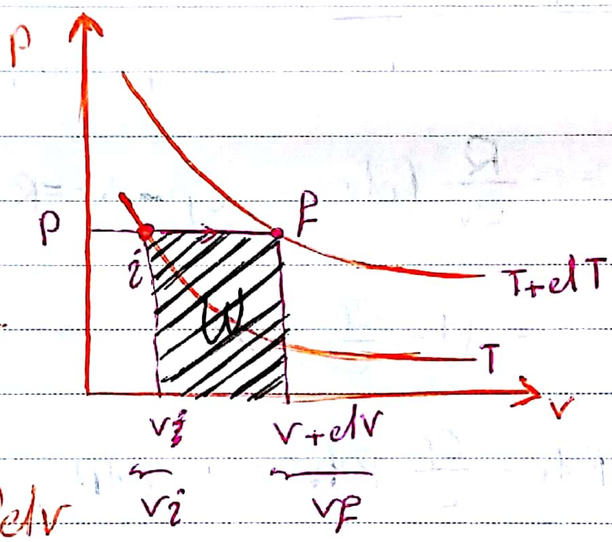
Scanned by CamScanner

4012.

Subject :
Date



② P const



$dE_{in} = dQ - dW$

$dQ = nc_p dT$

$\int dW = \int P dV = P \Delta V$

$dE_{in} = nc_p dT - P dV$

$PV = nRT \quad d(PV) = P dV = nR dT \qquad dE_{in} = nc_p dT - nR dT$

$\frac{3}{2} nR\,dT = nc_p dT - nR dT \longrightarrow \frac{3}{2}R + R = c_p \longrightarrow c_p = \frac{5}{2}R$

هم‌حجم : $dE_{in} = nc_v dT \longrightarrow nc_v dT = nc_p dT - nR dT$

$\longrightarrow \boxed{c_p = c_v + R}$

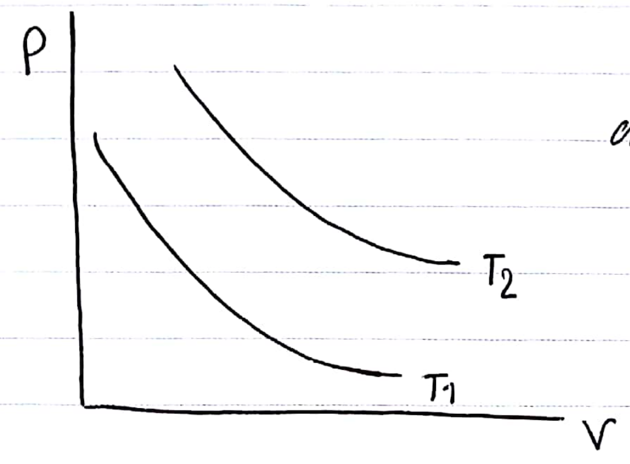
$\hookrightarrow c_p > c_v \longrightarrow$ گرمای لازم برای افزایش دمای گاز در فرآیند هم‌فشار بیشتر از هم‌حجم است.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

$dE_{in} = dQ - dw < 0$ انبساط بی‌دررو گاز کامل



$dE_{in} = \frac{3}{2} nRT$ | $dw = Pdv$

$Pv = nRT$ $\quad d(Pv) = vdP + Pdv$

$= nRdT = -\frac{PR}{C_v} dv$

$dE_{in} = nC_v dT = -Pdv$

$vdP + Pdv = -\frac{R}{C_v} Pdv$ $\quad C_p - C_v = R$ $\quad vdP + Pdv =$

$+\frac{C_v - C_p}{C_v} Pdv = \left(1 - \frac{C_p}{C_v}\right) Pdv \longrightarrow$

$vdP + Pdv = Pdv - \frac{C_p}{C_v} Pdv \longrightarrow vdp = -\frac{C_p}{C_v} Pdv$ $\quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$

$\frac{vdP}{Pv} + \frac{\gamma Pdv}{Pv} = 0 \longrightarrow \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dv}{v} = 0$

$\int \frac{dp}{p} = -\int \gamma \frac{dv}{v}$ $\quad \ln p = -\gamma \ln v \longrightarrow \ln p + \gamma \ln v = Const$

$\ln p + \ln v^{\gamma} = \ln C$ $\quad \ln pv^{\gamma} = \ln C$ $\quad Pv^{\gamma} = Const$

(v_i, P_i, T_i) و $(P_f, v_f, T_f) \longrightarrow P_i v_i^{\gamma} = P_f v_f^{\gamma}$

PAPCO

$Pv = nRT$ $\quad P = \frac{nRT}{v}$ $\quad Pv^{\gamma} = \frac{nRT}{v} v^{\gamma} = Const$

$\longrightarrow Tv^{\gamma-1} = Const \longrightarrow T_i v_i^{\gamma-1} = T_f v_f^{\gamma-1}$

Scanned by CamScanner

Subject: ۹۶/۱۰/۴
Date

$T_f = T_i$

در انبساط آزاد : $d(PV) = nR(dT) = 0$ $\quad PV = nRT \quad dE_{in} = 0$

$PV = const \Rightarrow P_iV_i = P_fV_f$

۹۶/۱۰/۱۱

1. آنتروپی و قانون دوم ترمودینامیک : اصل موضوع + آنتروپی

2. تعریف (انبساط آزاد)

3. تغییر آنتروپی به عنوان یک ویژگی از حالت سامانه — با استفاده از ترمودینامیکی — S و V و P و T

4. قانون دوم ترمودینامیک — اصل موضوع : در یک فرآیند برگشت ناپذیر در یک سامانه بسته آنتروپی همواره افزایش پیدا می‌کند.

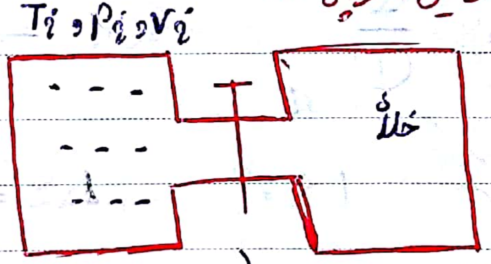
5. مثال انبساط نیرو و آنتروپی سامانه

6. ماشین‌های گرمایی

- ماشین کارنو
- استرلینگ

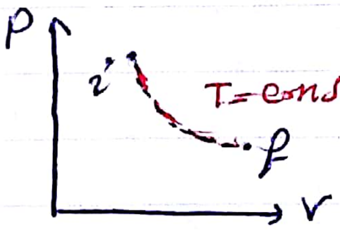
7. یخچال و قانون دوم ترمودینامیک

انبساط آزاد نیز مثالی از افزایش آنتروپی است — ناگهانی و برگشت ناپذیر



$dE_{int} = dQ - dW$ قانون اول ترمودینامیک

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T}$$



$$\Delta S = \frac{1}{T}\int_i^f dQ = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{Q}{T}$$

در انبساط آزاد $\rightarrow Q > 0 \rightarrow \Delta S > 0$ (J/K)

PAPCO

Subject:
Date

$dE_{int} = nc_v dT = \frac{3}{2} nR dT \quad dw = Pdv \quad dQ \Rightarrow$

$\begin{cases} nc_v dT + Pdv = dQ \\ Pv = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V} \end{cases}$ $\quad \frac{dQ}{T} = nc_v \frac{dT}{T} + \frac{Pdv}{T}$ $\quad \hookrightarrow \frac{nRTdv}{TV}$

$\longrightarrow \int_{S_i}^{S_f} ds = nc_v \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} + nR \int_{V_i}^{V_f} \frac{dv}{V}$

$\Delta S = nc_v \ln T_f/T_i + nR \ln V_f/V_i$

$\begin{cases} S_i = nc_v \ln T_i + nR \ln v_i \\ S_f = nc_v \ln T_f + nR \ln v_f \end{cases}$

در فرآیند برگشت $\longrightarrow \Delta S = \frac{Q}{T_{const}} \longrightarrow Q < 0 \Rightarrow \Delta S < 0$

سامانه بسته گاز + منبع گرمایی $\quad \Delta S = ? \longrightarrow \Delta S = \Delta S_{گاز} + \Delta S_{منبع گرمایی}$

$= \frac{-|Q|}{T} + \frac{|Q|}{T} = 0 \longrightarrow$ $\Delta S = 0$ فرآیند برگشت پذیر یک سامانه بسته

✓ قانون دوم ترمودینامیک: برای هر سامانه بسته، برای فرآیندها برگشت پذیر انتروپی سامانه ثابت می ماند و

برای فرآیندهای برگشت ناپذیر انتروپی سامانه همواره افزایش می یابد: $\Delta S \geq 0$

PAPCO

Scanned by CamScanner

42/۱۴۲

Subject:

Date

در کشیدن یک لاستیک از دو طرف :

$dE_{int} = dQ - dW$

رفتاری شبیه فنر داره !

$dW = -F dx$

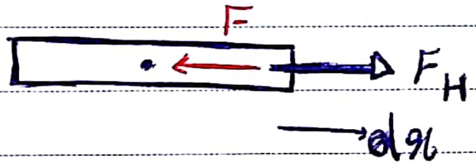
$dE_{int} = dQ + F dx \longrightarrow dQ = -F dx \longrightarrow T dS = -F dx$

$F = -\frac{T dS}{dx} = -T \frac{dS}{dx}$

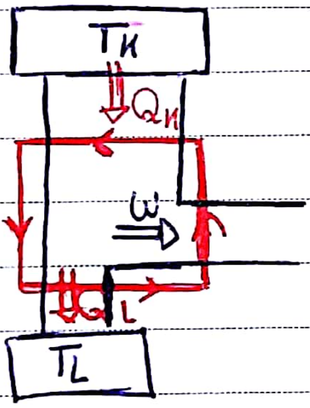
if $dS > 0$ تراکم کردن $\longrightarrow F < 0$

if $dS < 0 \longrightarrow$ انبساط $\longrightarrow F > 0$

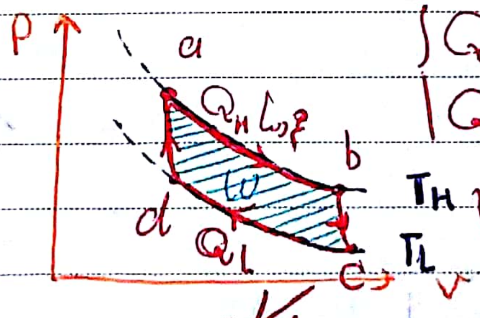
لاستیک را منبسط کنید آنتروپی اش کاهش می یابد ← منظم تر می شود



ماشین گرمایی :



چرخه کارنو



$Q_H > 0$

$Q_L < 0$

d-a و b-c : بی دررو

a-b و c-d : همدما

b-c و a-b → انبساط

c-d و d-a → تراکم

چرخه کارنو

$\oint_a^a dE_{int} = \oint dQ - \oint dW \Rightarrow$

Scanned by CamScanner

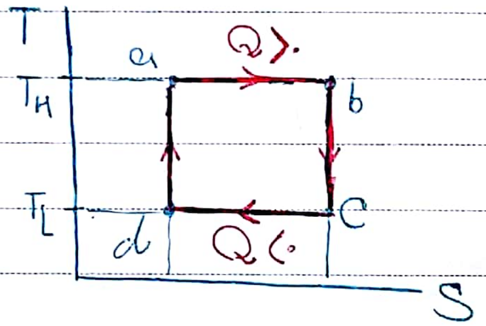
Subject:
Date

چرخه کامل $\Delta E_{int} = |Q_H| - |Q_L| - W$

$W = W_{a-b} + W_{b-c} + W_{c-d} + W_{d-a}$ ($W_{a-b} > 0$, $W_{b-c} > 0$, $W_{c-d} < 0$, $W_{d-a} < 0$)

$\Delta E_{int} = 0$ (چرخه) $\longrightarrow W = |Q_H| - |Q_L|$

کار انجام شده توسط سامانه یک ماشین کارنو



$\Delta S = \frac{Q}{T}$, $T \to const$

$\Delta S = \Delta S_{a-b} + \Delta S_{b-c} + \Delta S_{c-d} + \Delta S_{d-a} \Rightarrow$ ($\Delta S_{b-c} = 0$, $\Delta S_{d-a} = 0$)

$\Delta S = \frac{|Q_H|}{T_H} - \frac{|Q_L|}{T_L}$

چرخه کامل $\Delta S = 0 \longrightarrow \frac{|Q_H|}{T_H} = \frac{|Q_L|}{T_L}$

بازده ماشین $\varepsilon = \frac{\text{کار انجام شده توسط ماشین}}{\text{انرژی مصرف شده}} = \frac{W}{|Q_H|} = \frac{|Q_H| - |Q_L|}{|Q_H|} \longrightarrow \varepsilon_C = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} =$

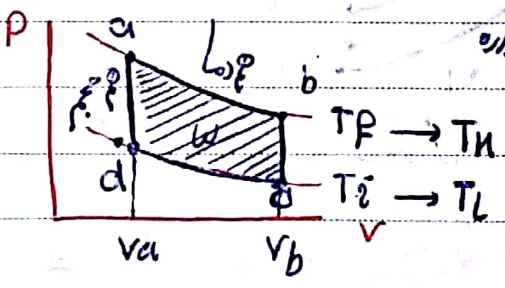
برای کارنو

$1 - \frac{T_L}{T_H} \longrightarrow \varepsilon_C = 1 - \frac{T_L}{T_H} < 1$

$W_S < W_C$

همواره $\varepsilon_S < \varepsilon_C$

ماشین استرلینگ:

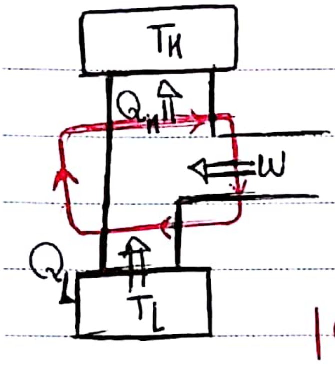


P4PCO

Scanned by CamScanner

43/۴۳

Subject:
Date



یخچال:

$$K = \frac{|Q_L|}{|W|}$$

$\Delta E_{int} = 0 \longrightarrow$

$$|Q_H| - |Q_L| = |W|$$

$\Delta S = 0 \longrightarrow \frac{|Q_H|}{|Q_L|} = \frac{T_H}{T_L}$

یخچال کارنو $\quad K_C = \frac{|Q_e|}{|Q_H| - |Q_e|} = \frac{T_e}{T_H - T_e}$

یخچال کامل (رویایی) $\longrightarrow |W| = 0 \longrightarrow |Q_H| = |Q_e| = |Q| \quad K_C \longrightarrow \infty$

$$\Delta S = -\frac{|Q_L|}{T_L} + \frac{|Q_H|}{T_H} = \frac{-|Q|}{T_L} + \frac{|Q|}{T_H} \Rightarrow T_L < T_H \Rightarrow$$

$\Delta S < 0 \longleftarrow$ نقض قانون دوم ترمودینامیک $\xleftarrow{\text{چون}}$ یخچال وجود ندارد

PAPCO